

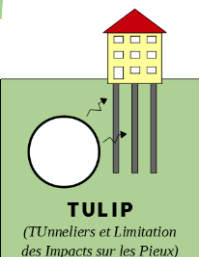
Synthèse des résultats de l'expérimentation TULIP

Agathe MICHALSKI (CETU / ENTPE)

Wassim MOHAMAD (UGE)

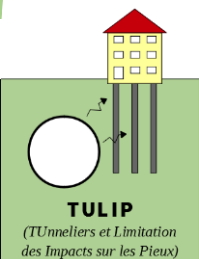
Nicolas BERTHOZ (CETU)
Denis BRANQUE (ENTPE)

Emmanuel BOURGEOIS (UGE)
Fabien SZYMKIEWICZ (UGE)
Alain LE KOUBY (UGE)



SOMMAIRE

- ❖ Présentation de l'expérimentation en vraie grandeur
- ❖ Réponse des pieux au chargement
- ❖ Conditions de creusement du TBM
- ❖ Réponse du terrain au creusement
- ❖ Réponse des pieux au creusement



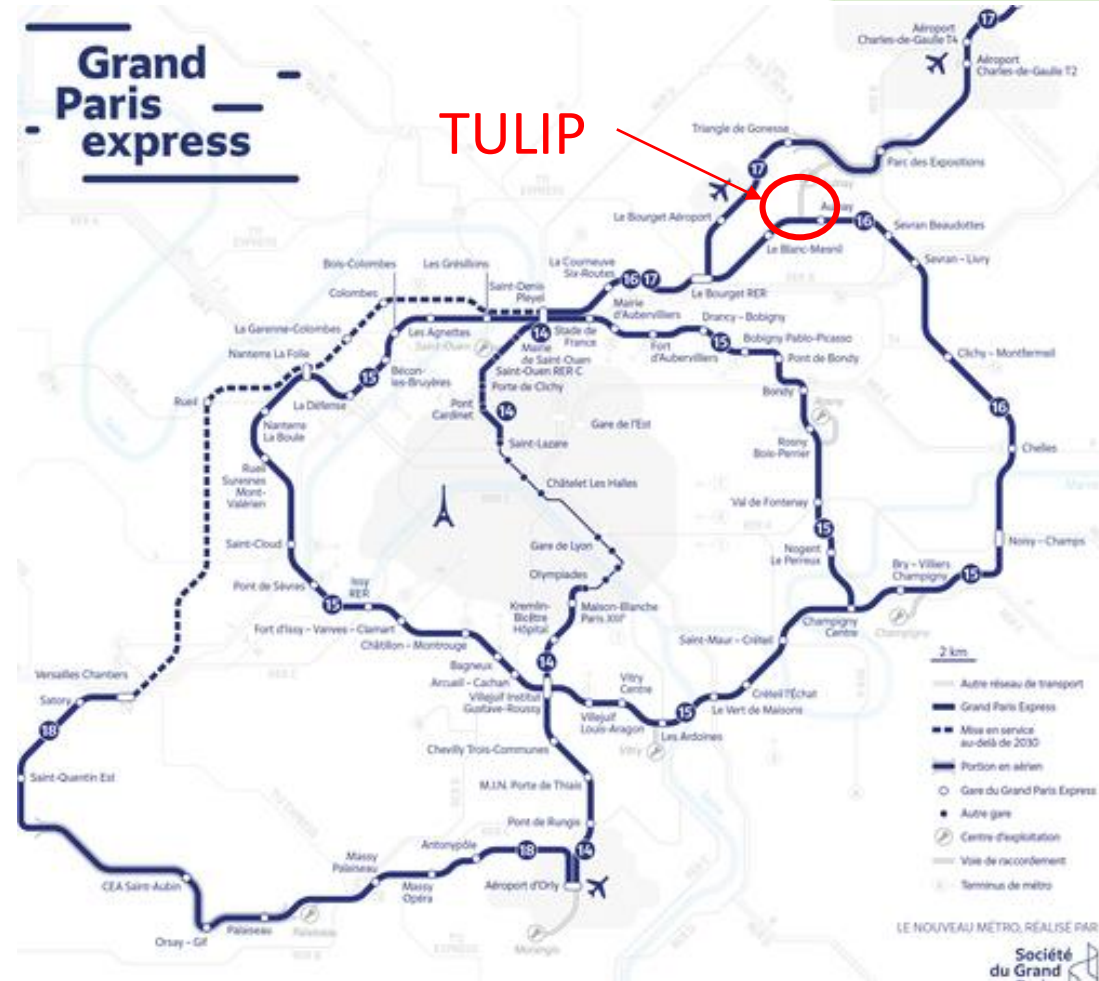
LOCALISATION

- Future ligne 16
- Débranchement vers le centre de maintenance
- Pas d'avoisinant



TULIP

(Tunneliers et Limitation des Impacts sur les Pieux)

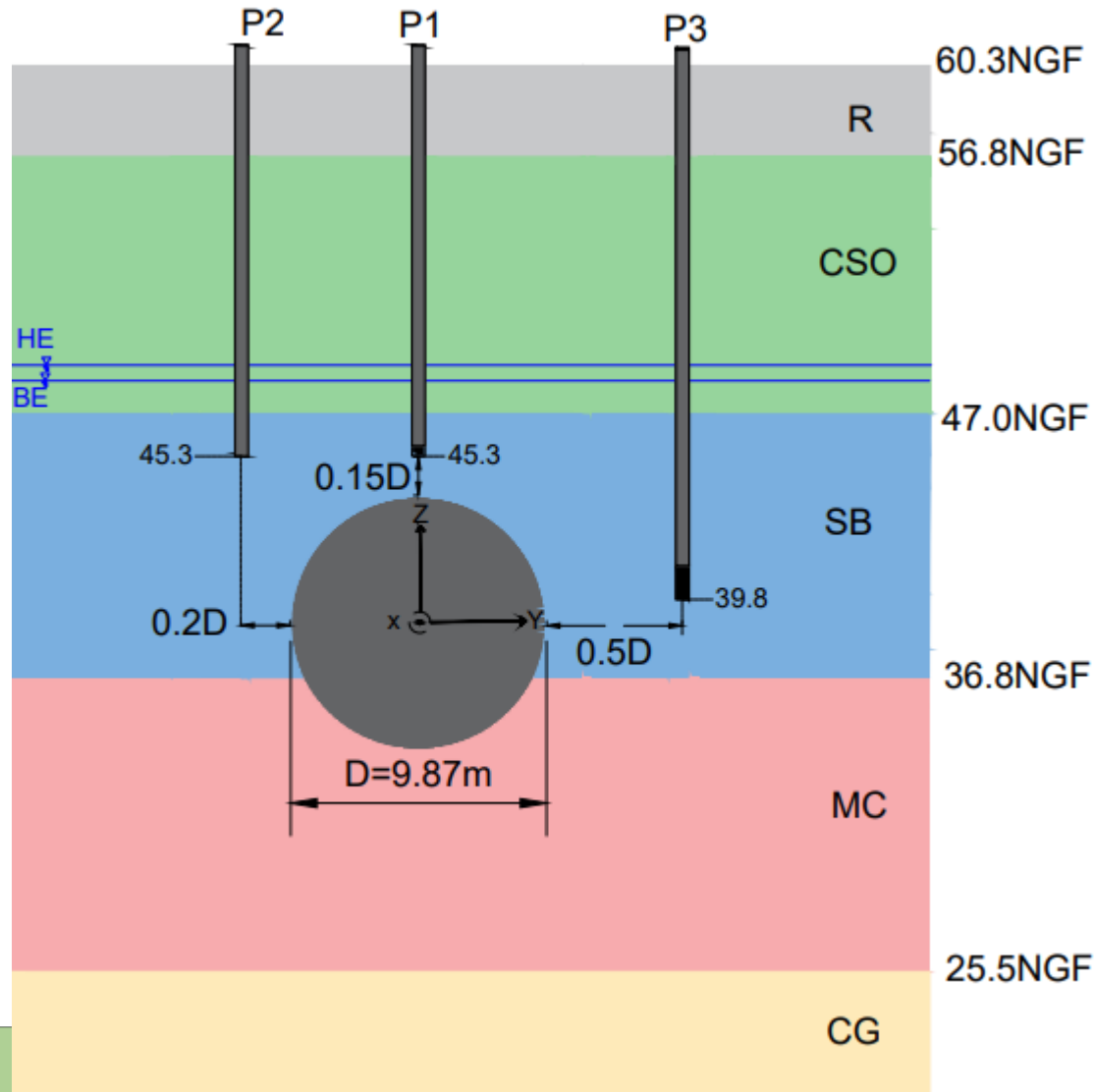


Calendrier de mises en service

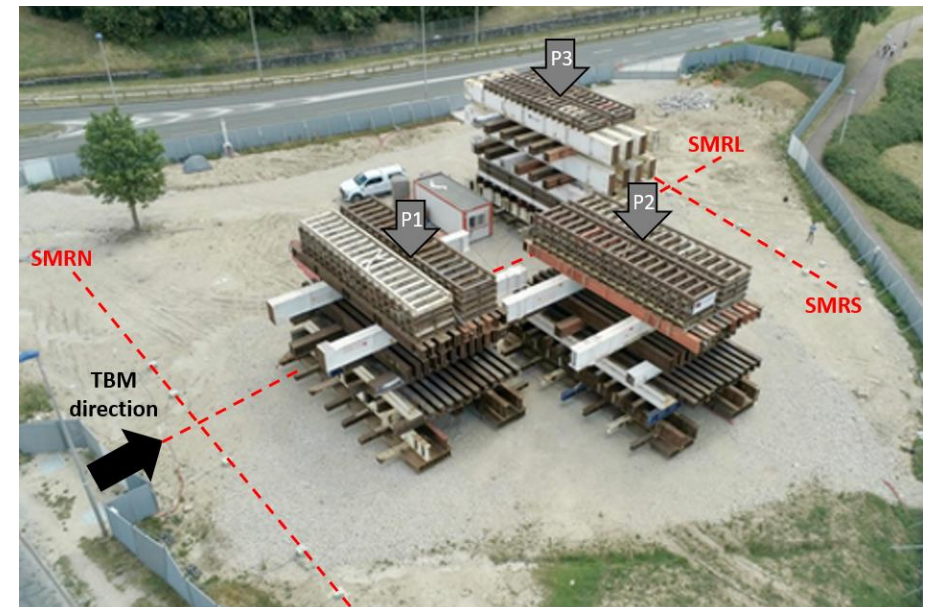


Exercice de prévision de l'impact d'un tunnelier sur une fondation profonde - *Restitution du 14/10/21*

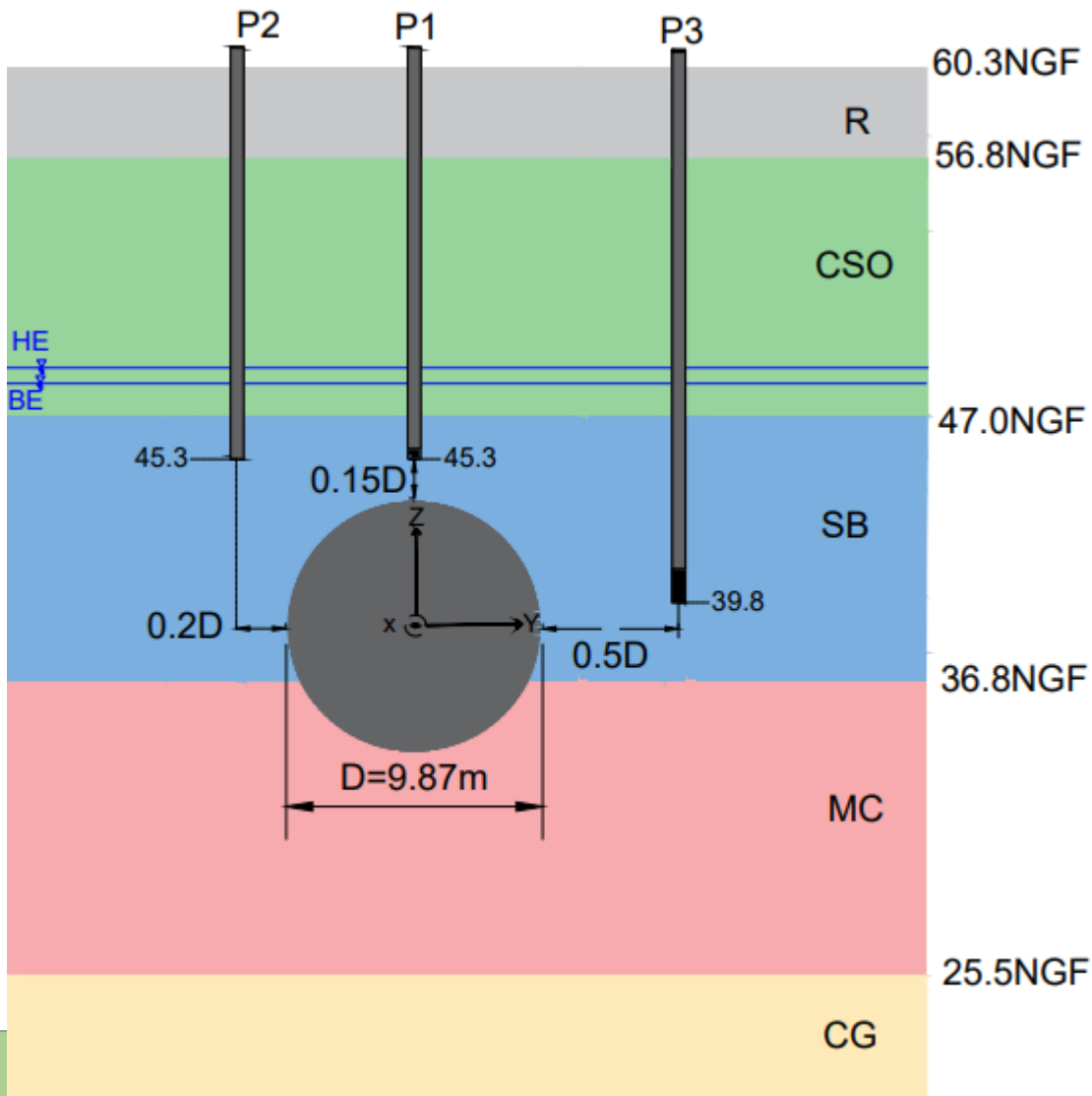
GÉOMÉTRIE



- Tunnel : $D = 9.87\text{ m}$; $P_{\text{axe}} \approx 21\text{ m}$
- 3 pieux ($\phi = 500\text{ mm}$) à différentes positions par rapport au tunnel
- Pas d'interaction entre les pieux



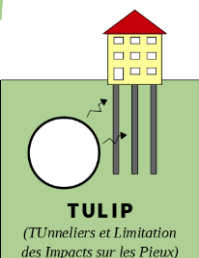
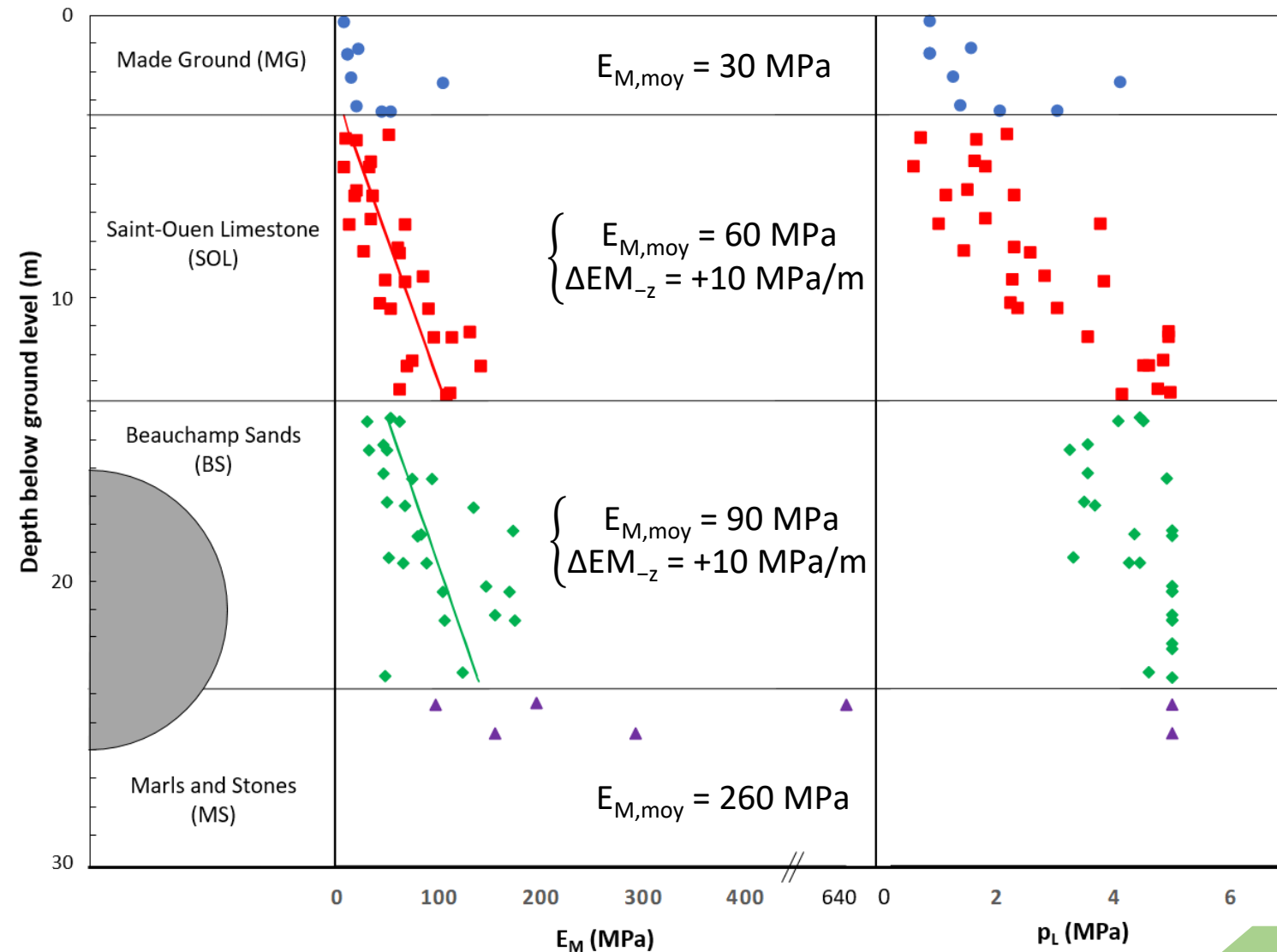
GÉOLOGIE



- TN en place, léger terrassement des remblais
- Lithologie classique du Bassin Parisien, déduite des sondages réalisés à proximité
- Nappe phréatique : entre 48.2NGF et 48.8NGF

SYNTHÈSE DES MESURES PRESSIOMÉTRIQUES

- Analyse des 3 essais pressiométriques réalisés dans l'axe des pieux
- Modules pressiométriques moyens : 30 MPa (R) ; 60 MPa (CSO) ; 90 MPa (SB) ; 260 MPa (MC)
- Augmentation du module pressiométrique avec la profondeur
- Pressions limites : augmentation avec la profondeur dans les CSO ; environ 5 MPa dans les SB et MC



SYNTHÈSE DES ESSAIS DE LABORATOIRE

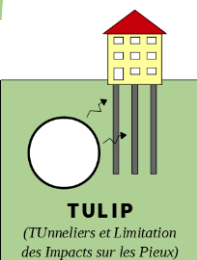
Essais triaxiaux :

- Encadrement du couple [c' (kPa), φ' (°)]
- $E_{50} \approx 20$ MPa (R) ; 40 à 60 MPa (CSO) ; 18 à 180 MPa (SB) ; 40 à 360 MPa (MC)
- $E_{50} \approx E_M$
- $E_{ur} \approx 3E_{50}$

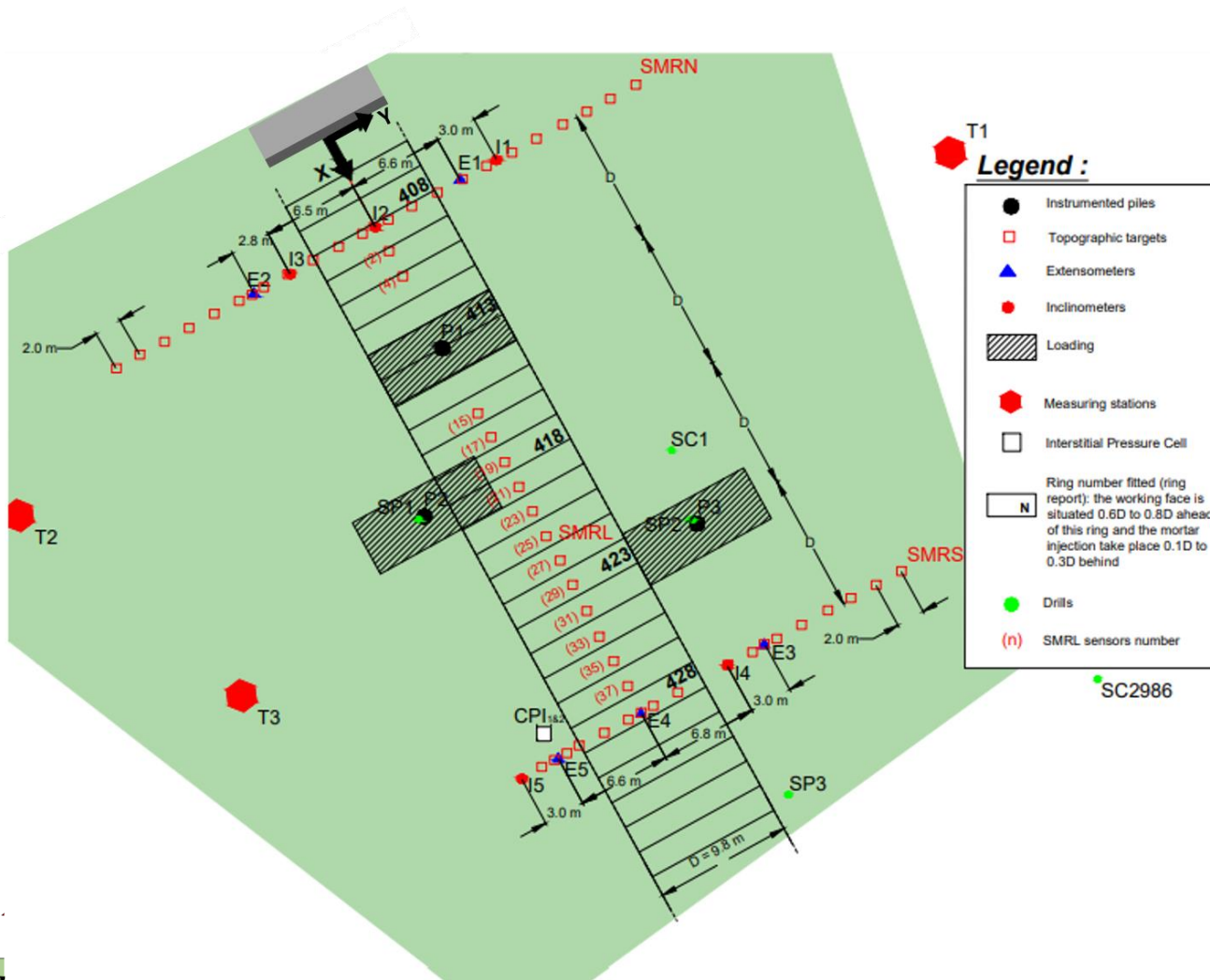
Essais oedométriques : surconsolidation des sols

NOTA : essais Lefranc (perméabilités de l'ordre de 10^{-6} à 10^{-4} m/s)

	Remblais (R)	Calcaires Saint-Ouen (CSO)	Sables de Beauchamp (SB)	Marnes et Caillasses (MC)	
	Cote NGF toit formation	60.3	56.8	47	36.8
Hydro	Cote NGF toit nappe	48.2 à 48.8			
	k_v (m/s)	-	10^{-6} à 10^{-4}	10^{-6} à 10^{-5}	10^{-6} à 10^{-5}
	k_h (m/s)	-	10^{-5} à 10^{-3}	10^{-5} à 10^{-4}	10^{-5} à 10^{-4}
	γ (kN/m ³)	19	18	21	20
Pressiométriques	E_{M-a} (MPa)	34	60	126	263
	ΔE_{M-z} (MPa/m)	-	10	28	-
	E_{M-z} (MPa)	24	44	92	220
	E_{M-h} (MPa)	18	34	75	187
	p_{l-a} (MPa)	1.9	2.8	3.8	>5
Oed	C_c (-)	0.138	0.291	0.069	0.1585
	C_s (-)	0.010	0.036	0.009	0.0195
	σ'_p (kPa)	90	530 à 550	200 à 508	48 à 580
Triaxiaux	E_{50-ref} (MPa)	20	40 à 60	18 à 180	40 à 360
	E_{ur-ref} / E_{50-ref}	2.5	2.5 à 4	2.5 à 3	3
	Evolution avec la profondeur ou σ_3	Pas d'information	Pas d'information	$E_{oed} = 43(\sigma_{zz})^{0.605}$ à $61(\sigma_{zz})^{0.414}$	Pas d'information
	ν (-)	0.3	0.3	0.37	0.3
	[c' (kPa), φ' (°)]	[0 ; 28]	[10 ; 33] à [30 ; 42]	[10 ; 33] à [0 ; 41]	[190 ; 27] à [15 ; 38]
	Ψ (°)	-	-	3	-



INSTRUMENTATION DU TERRAIN : EN SURFACE



- 54 cibles topographiques : 2 lignes transversales + 1 ligne longitudinale
- 3 stations de mesure de haute précision (+/- 0.2 mm)
- Déplacements dans les 3 directions
- Acquisition des mesures toutes les 20 minutes

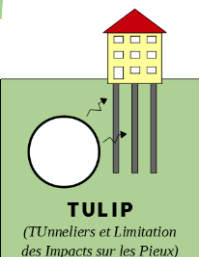
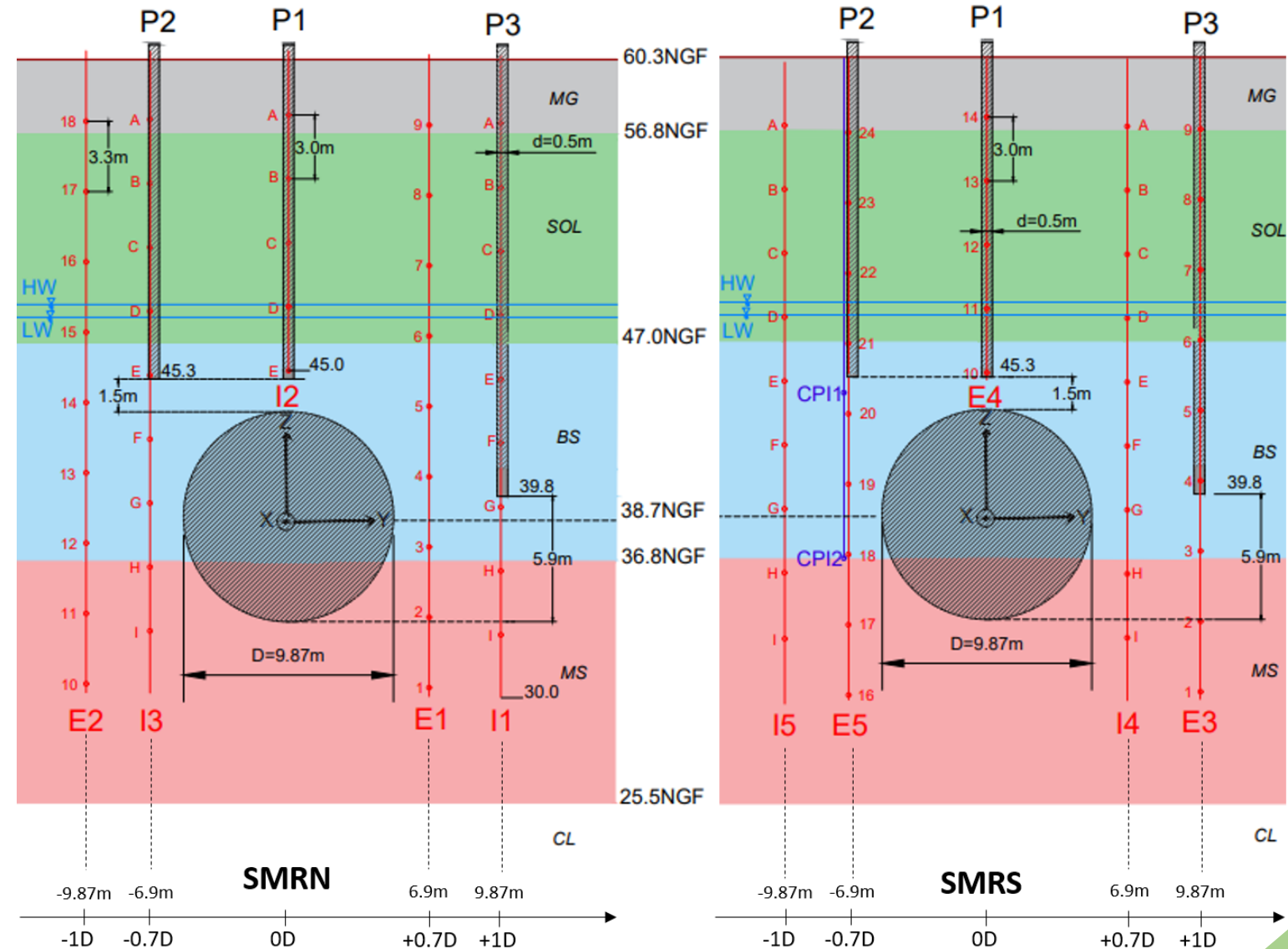
INSTRUMENTATION DU TERRAIN : EN PROFONDEUR

Déplacements verticaux :

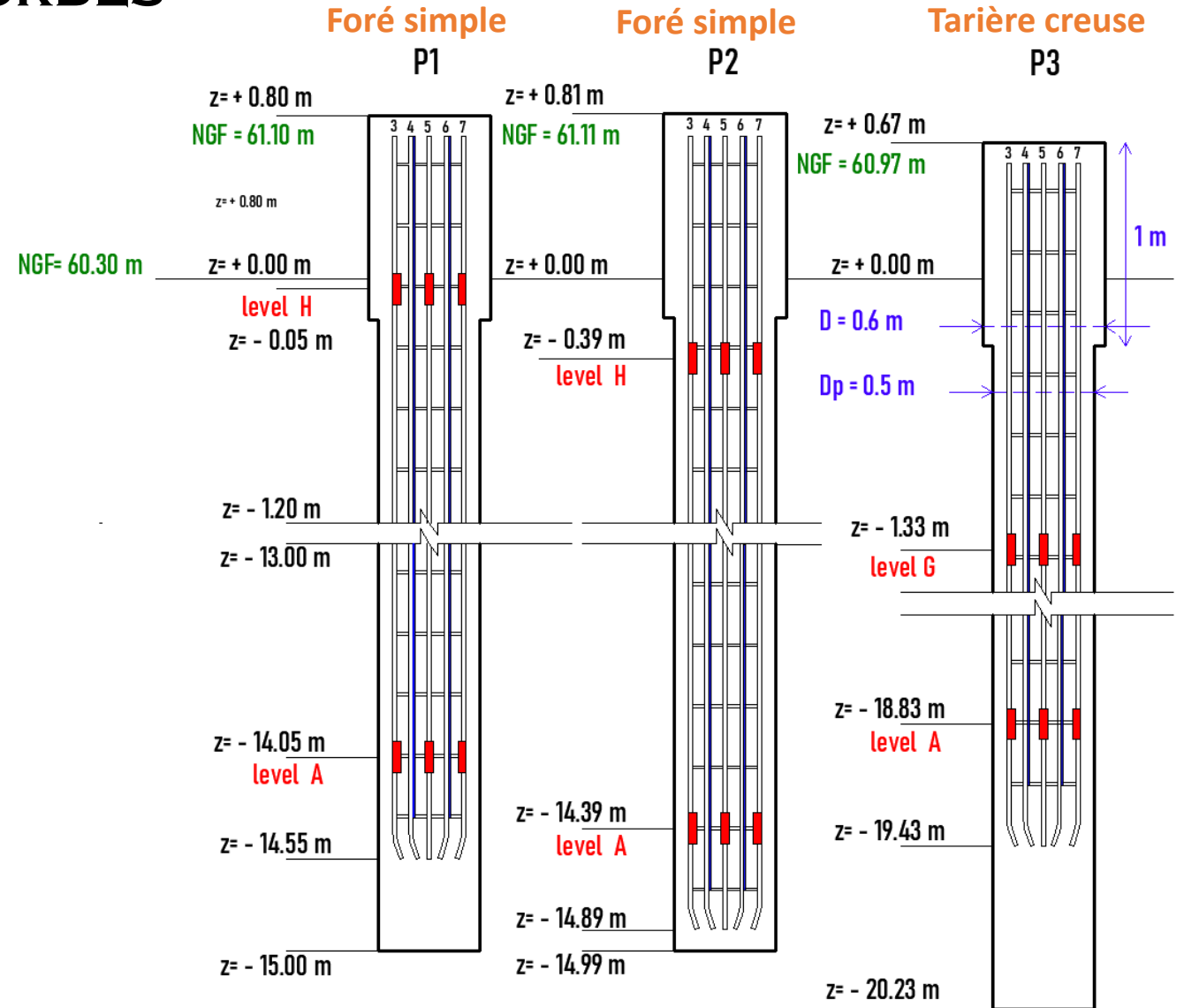
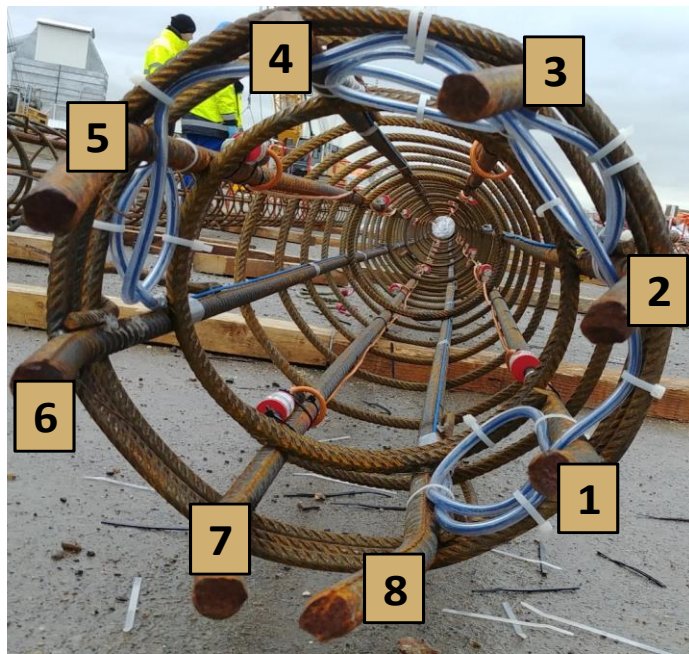
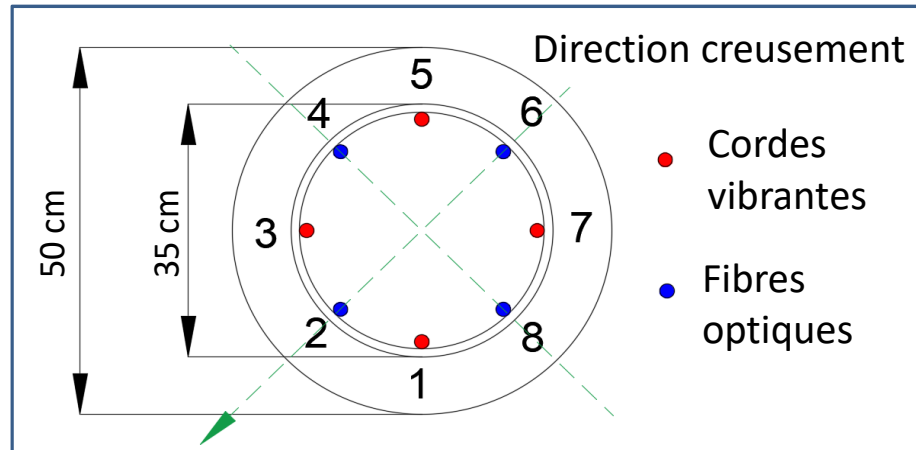
- 5 extensomètres de forage multipoints
- 9 ancres espacées de 3.3 m
- Même position que les pieux
- Précision : +/- 0.2 mm

Déplacements horizontaux (\vec{u}_x, \vec{u}_y) :

- 5 inclinomètres automatiques
- 9 capteurs espacés de 3 m
- Même position que les pieux
- Précision angulaire : 0.5°



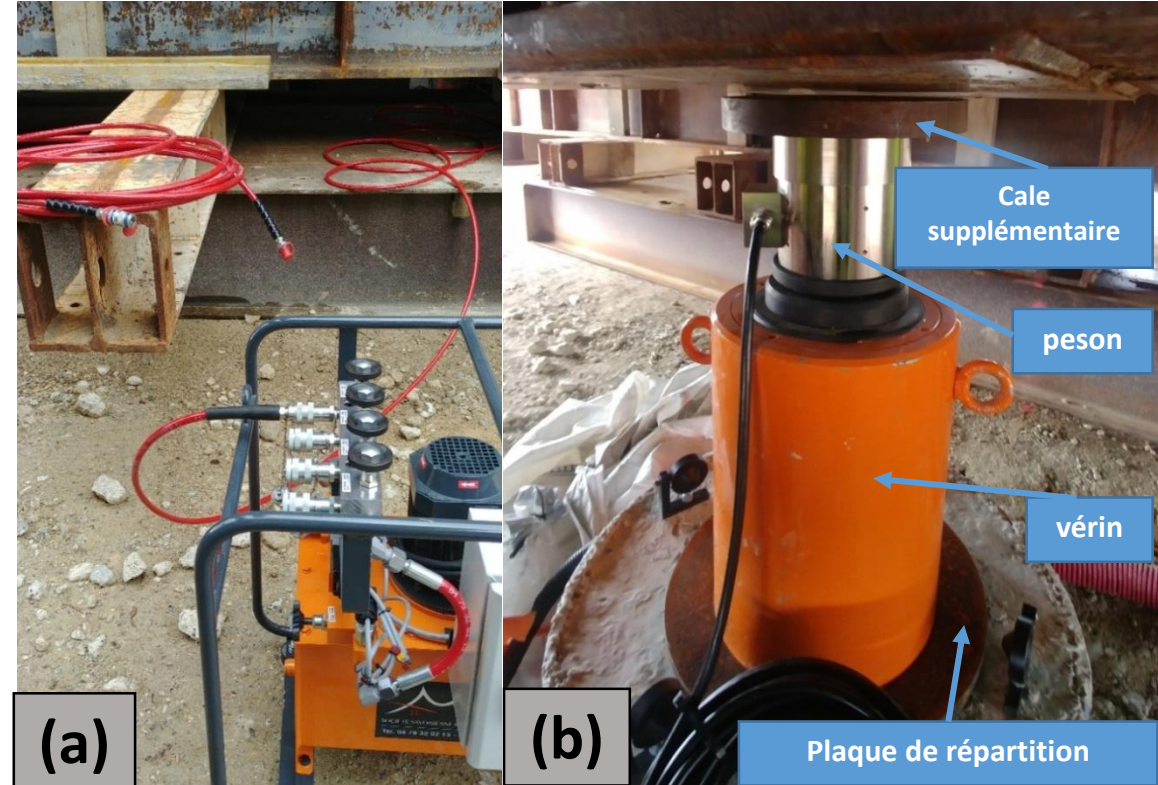
INSTRUMENTATION DES PIEUX : CORDES VIBRANTES ET FIBRES OPTIQUES



Positions des cordes

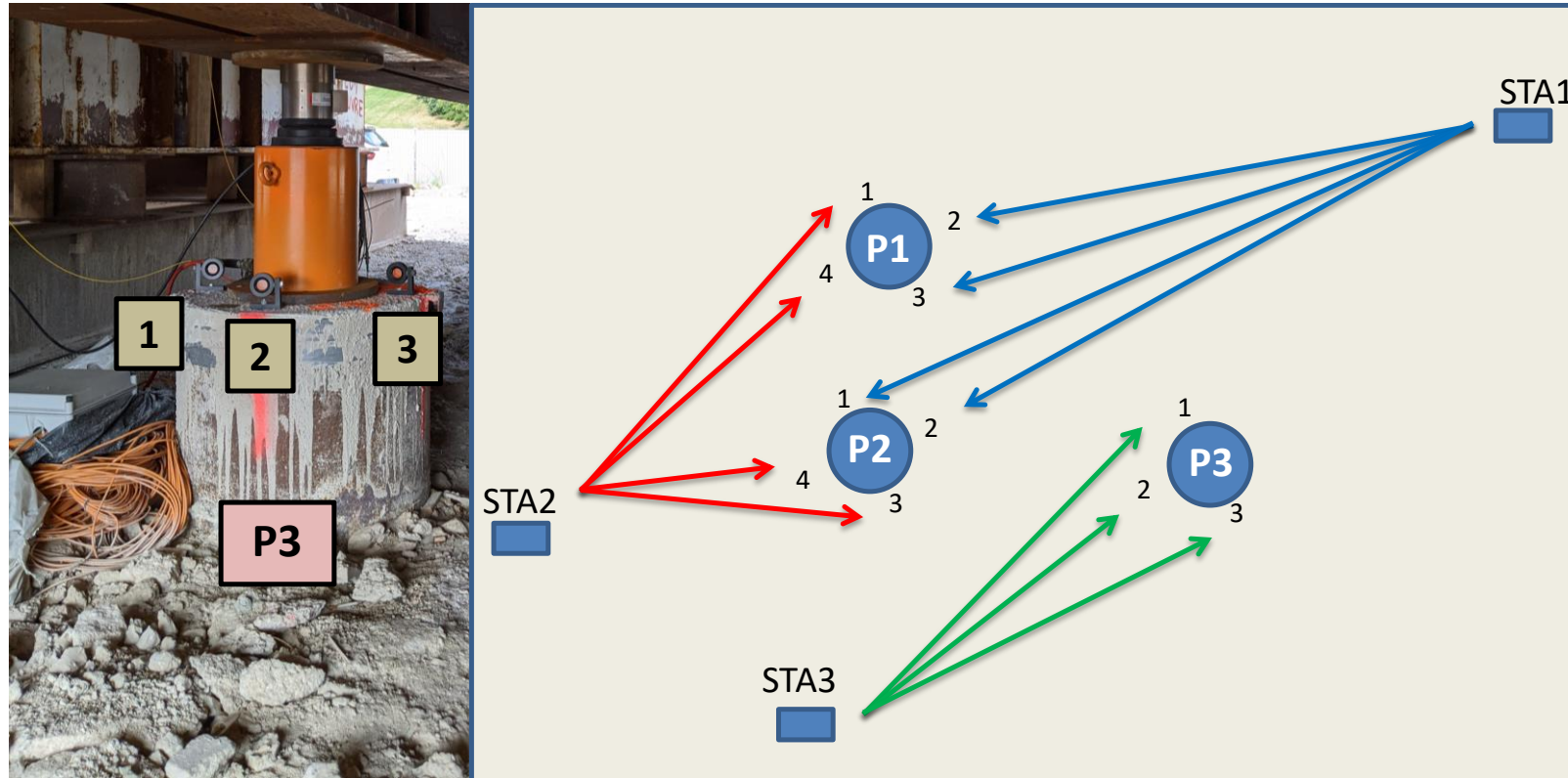
CHARGEMENT DES PIEUX

- trois vérins hydrauliques prenant appui sous des massifs de réaction
- Capacité de vérin : 250 tonnes
- Une pompe pour les trois pieux
- Charge en tête : 2100 kN
 - 33% de la capacité portante de P3
 - 54% de la capacité portante de P1 / P2



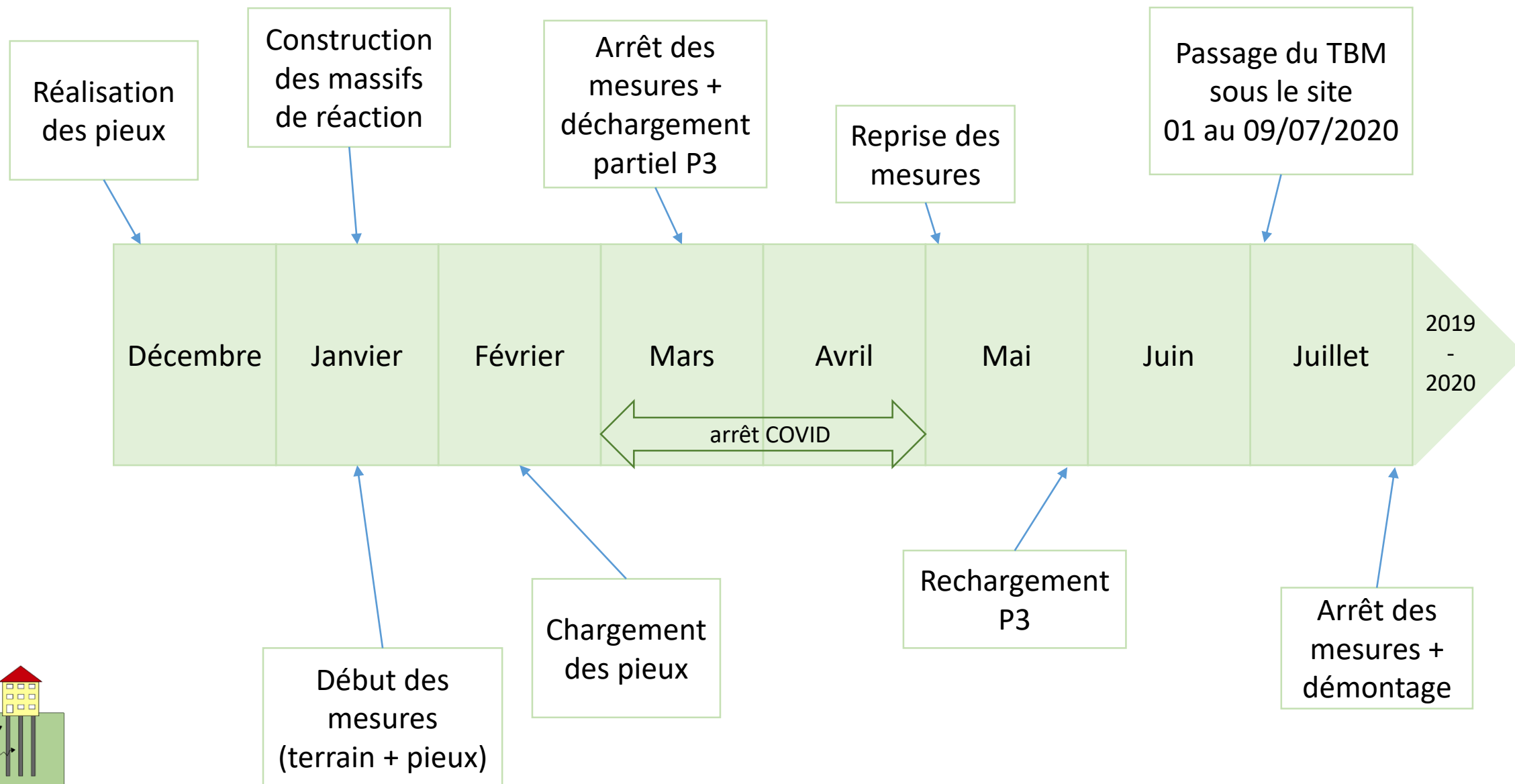
système de chargement des pieux adopté dans le projet TULIP

AUSCULTATION EN TÊTE DES PIEUX

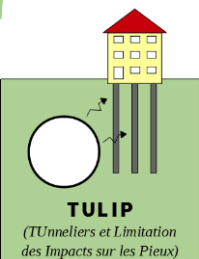


Auscultation en tête des pieux

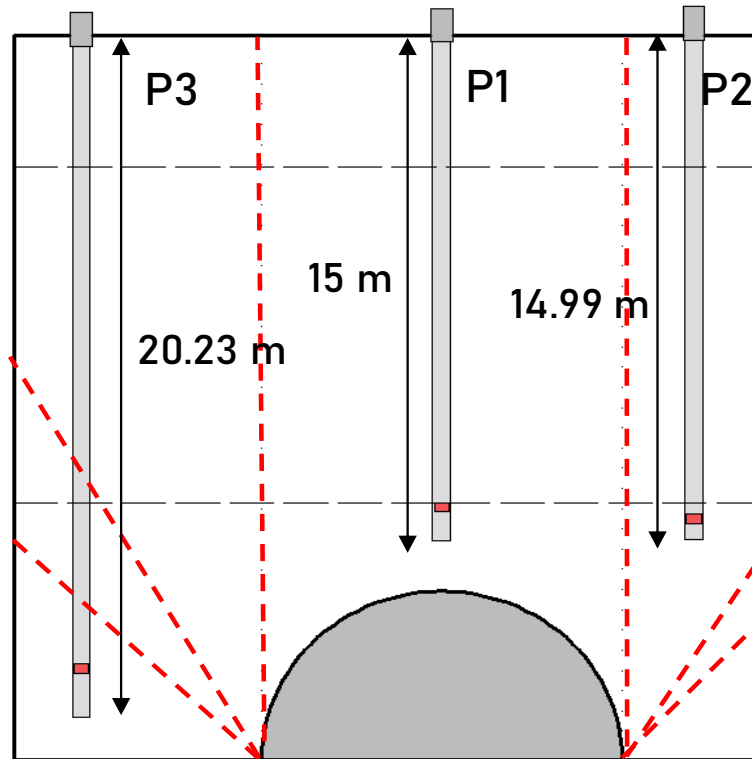
PLANNING DE RÉALISATION



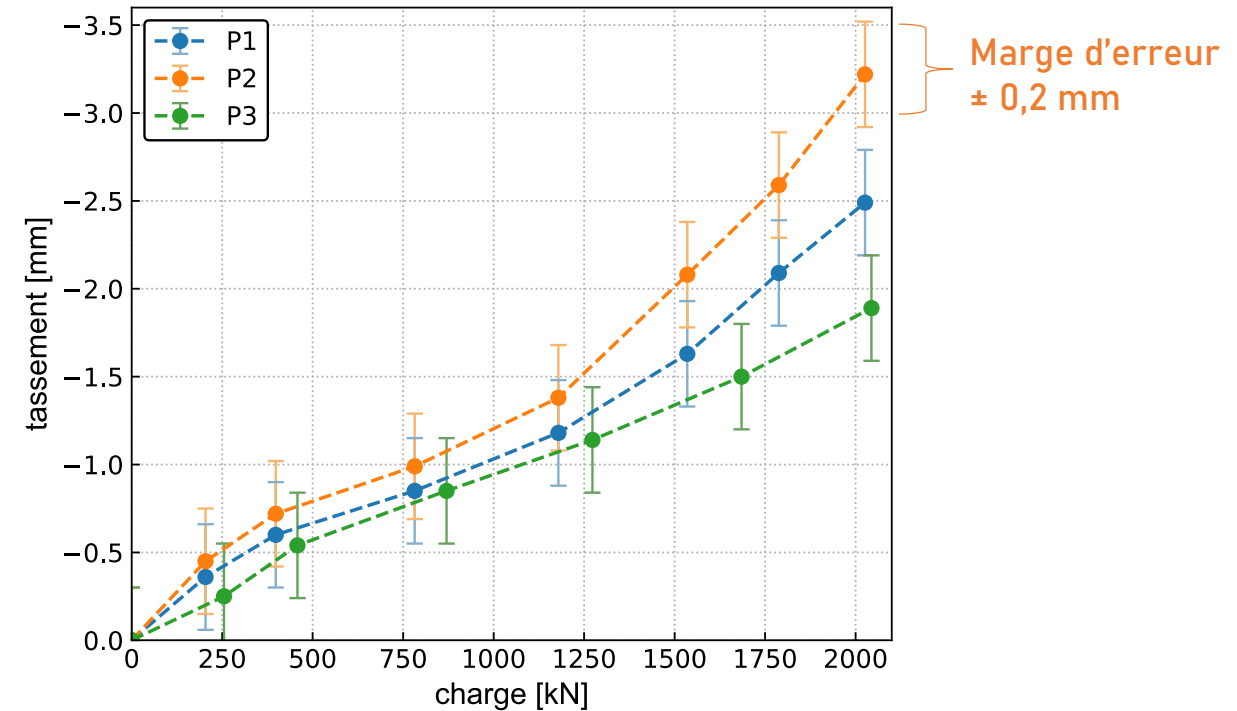
Réponse des pieux au chargement



DÉPLACEMENTS EN TÊTE DES PIEUX



Positions des pieux



Tassement pour chaque palier

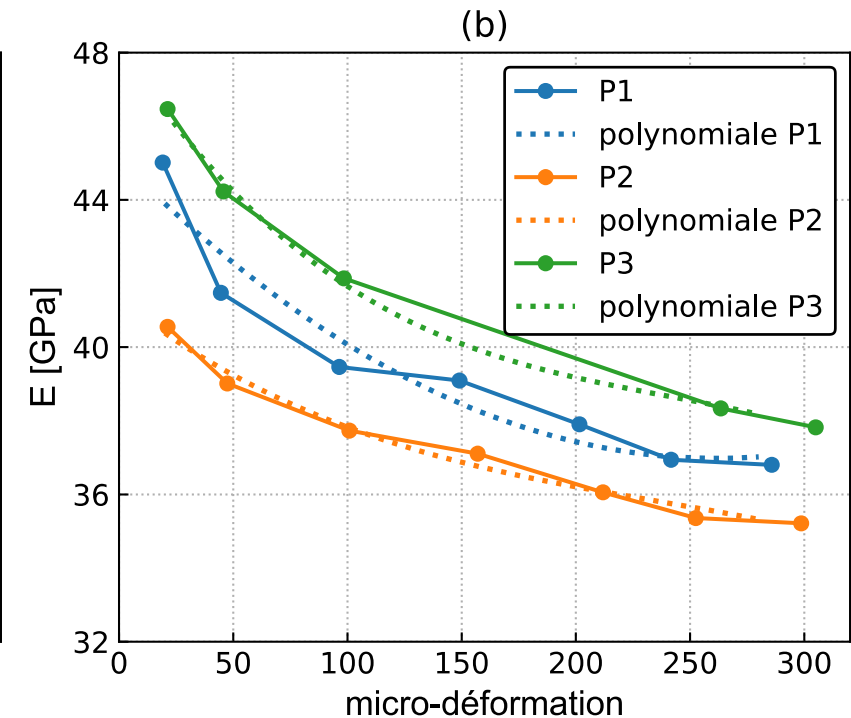
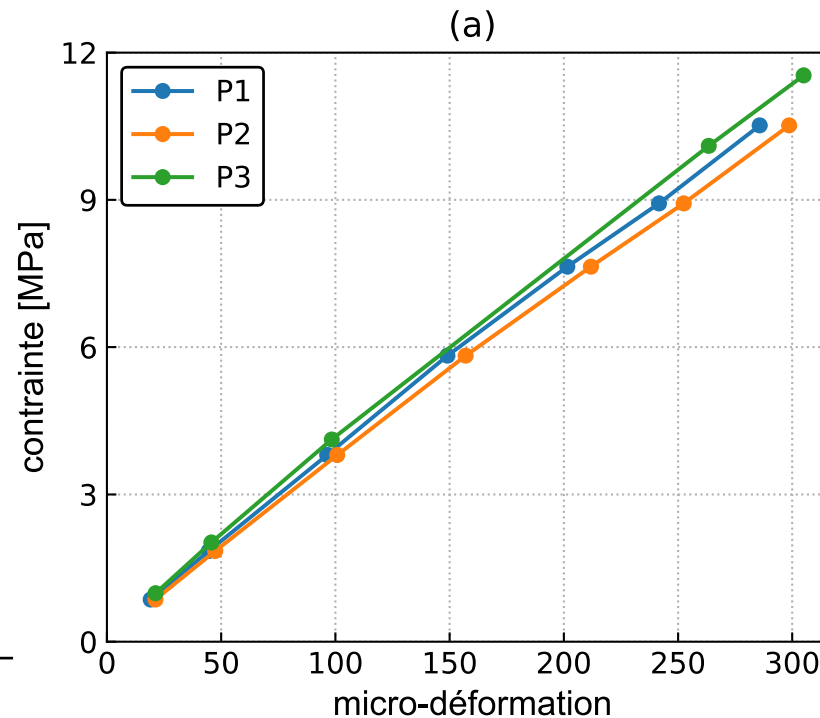
P1	charge (kN)	204	398	782	1179	1535	1788	2026
	tassement (mm)	-0.36	-0.60	-0.85	-1.18	-1.63	-2.09	-2.49
P2	charge (kN)	204	398	782	1179	1535	1788	2026
	tassement (mm)	-0.45	-0.72	-0.99	-1.38	-2.08	-2.59	-3.22
P3	charge (kN)	255	458	870	1273	1685	2044	
	tassement (mm)	-0.25	-0.54	-0.85	-1.14	-1.5	-1.89	

MODULES DES PIEUX

- Module sécant
- Calcul en tête de pieu
- Hypothèse que la courbe est applicable tout au long du pieu
- $E = \sigma/\varepsilon$ en tête de pieu

Modules en tête et en pointe des pieux

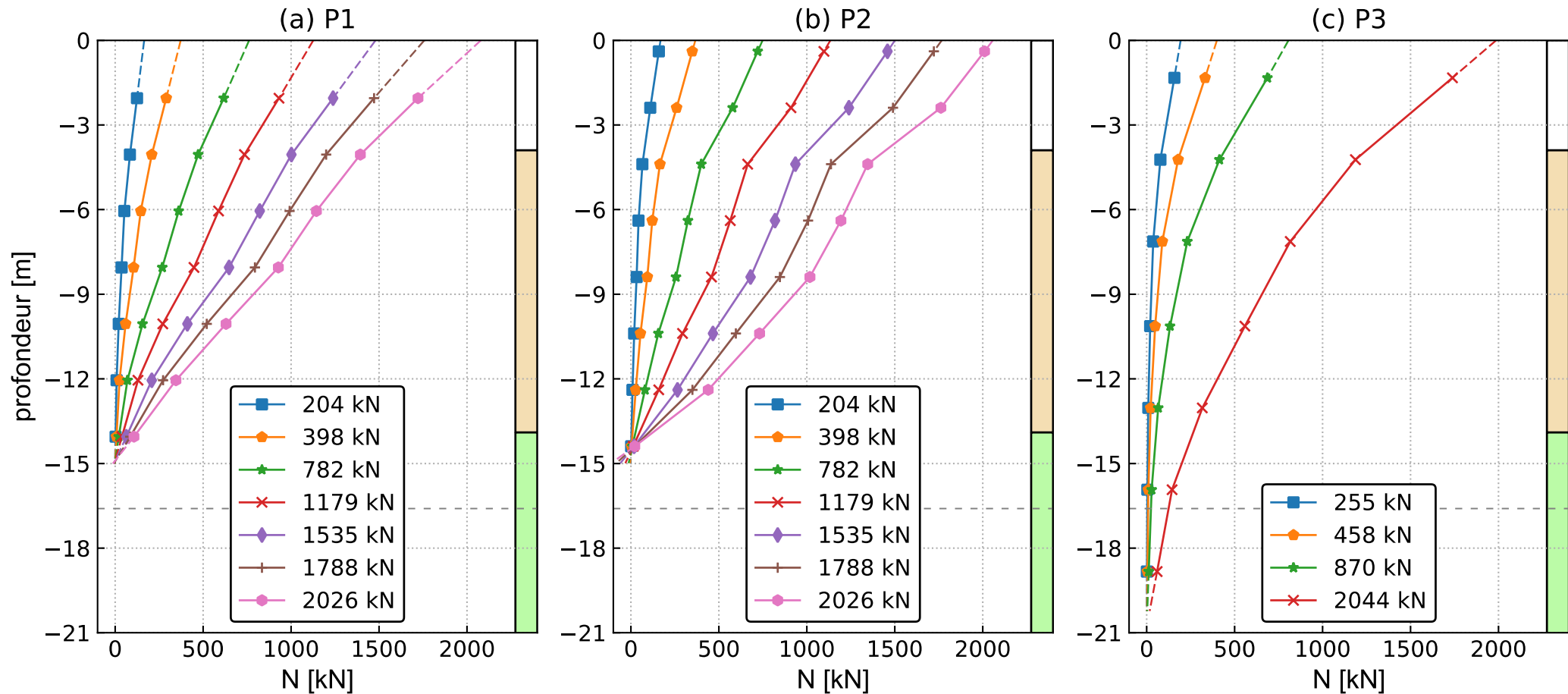
E (GPa)	P1	P2	P3
tête	37	35	38
pointe	48	42	48



(a) Courbes contrainte – déformation en tête de chaque pieu

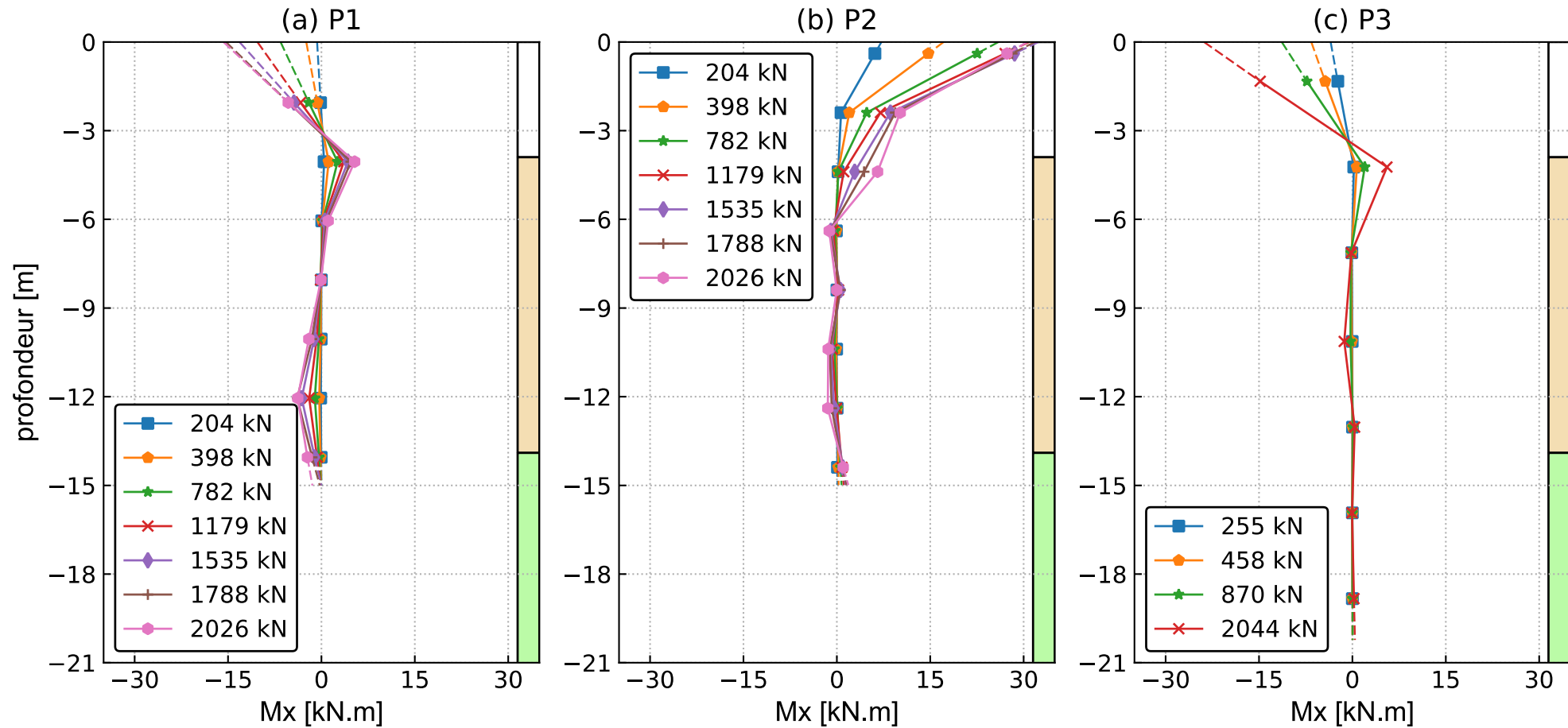
(b) Courbes module – déformation en tête de chaque pieu

EFFORTS NORMAUX



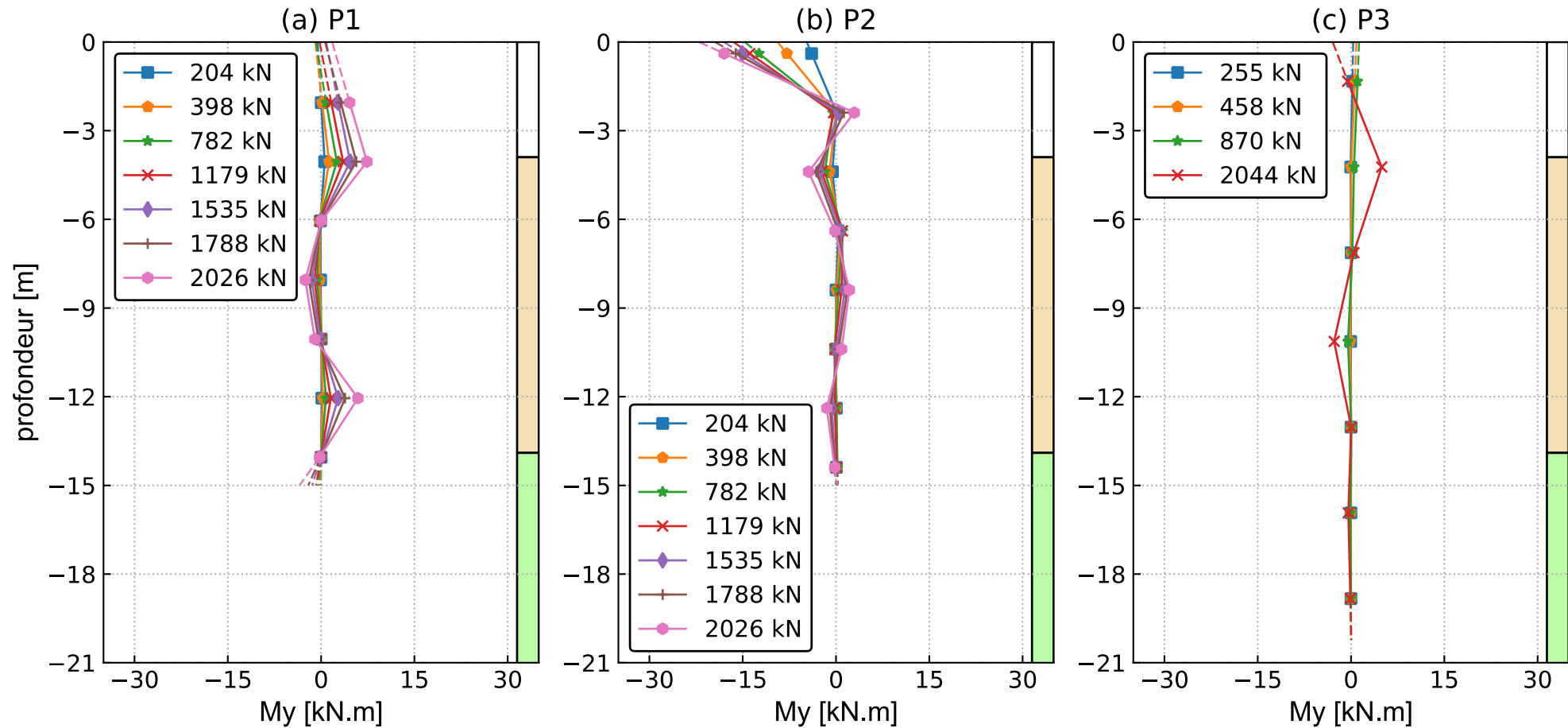
Efforts normaux dans les pieux pendant le chargement

MOMENTS FLÉCHISSANTS



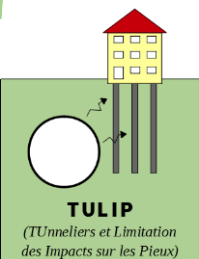
Moments transversaux dans les pieux pendant le chargement

MOMENTS FLÉCHISSANTS

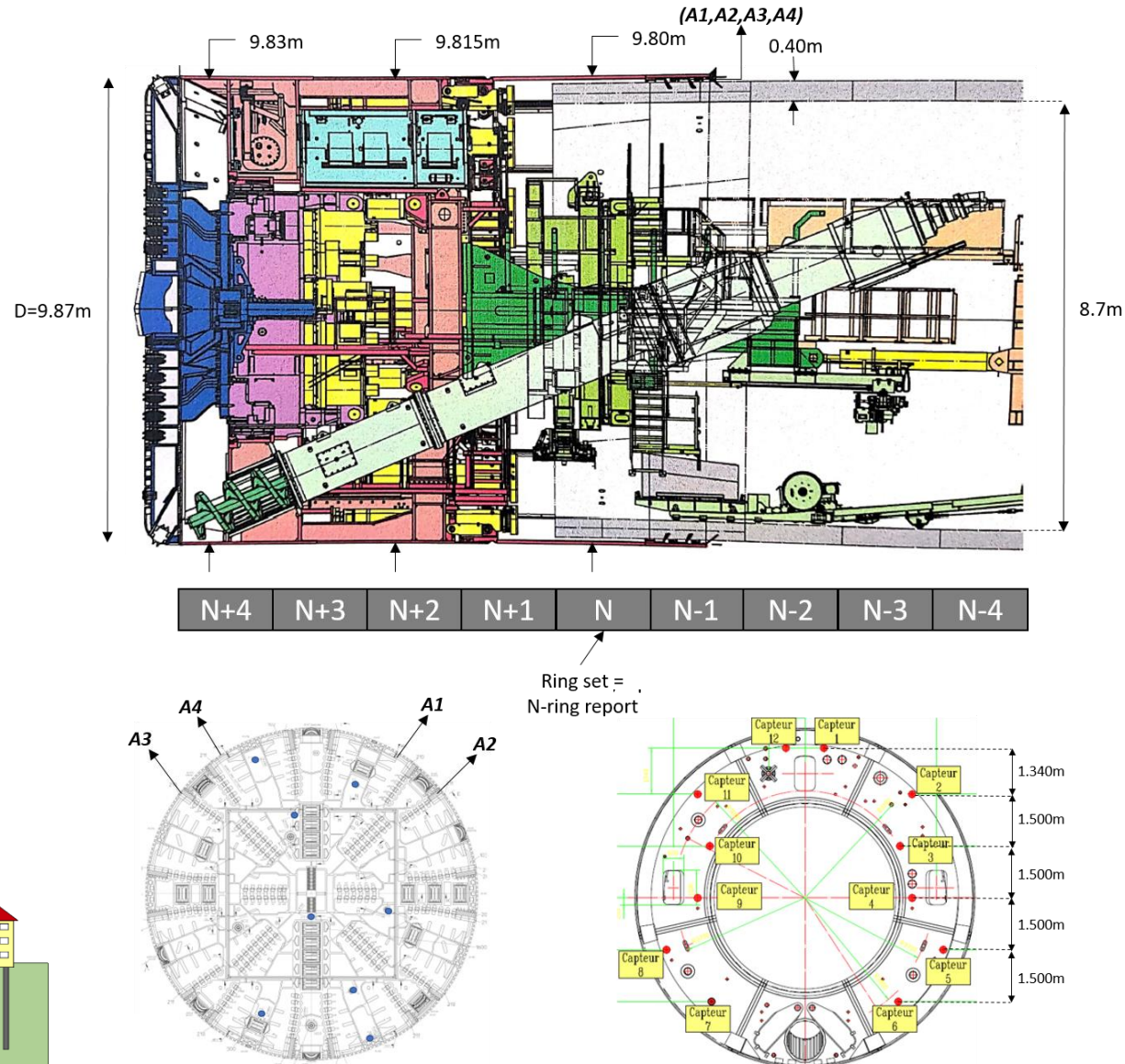


Moments longitudinaux dans les pieux pendant le chargement

Conditions de creusement du TBM



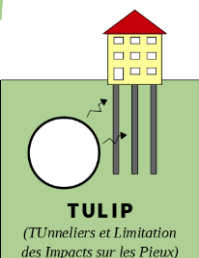
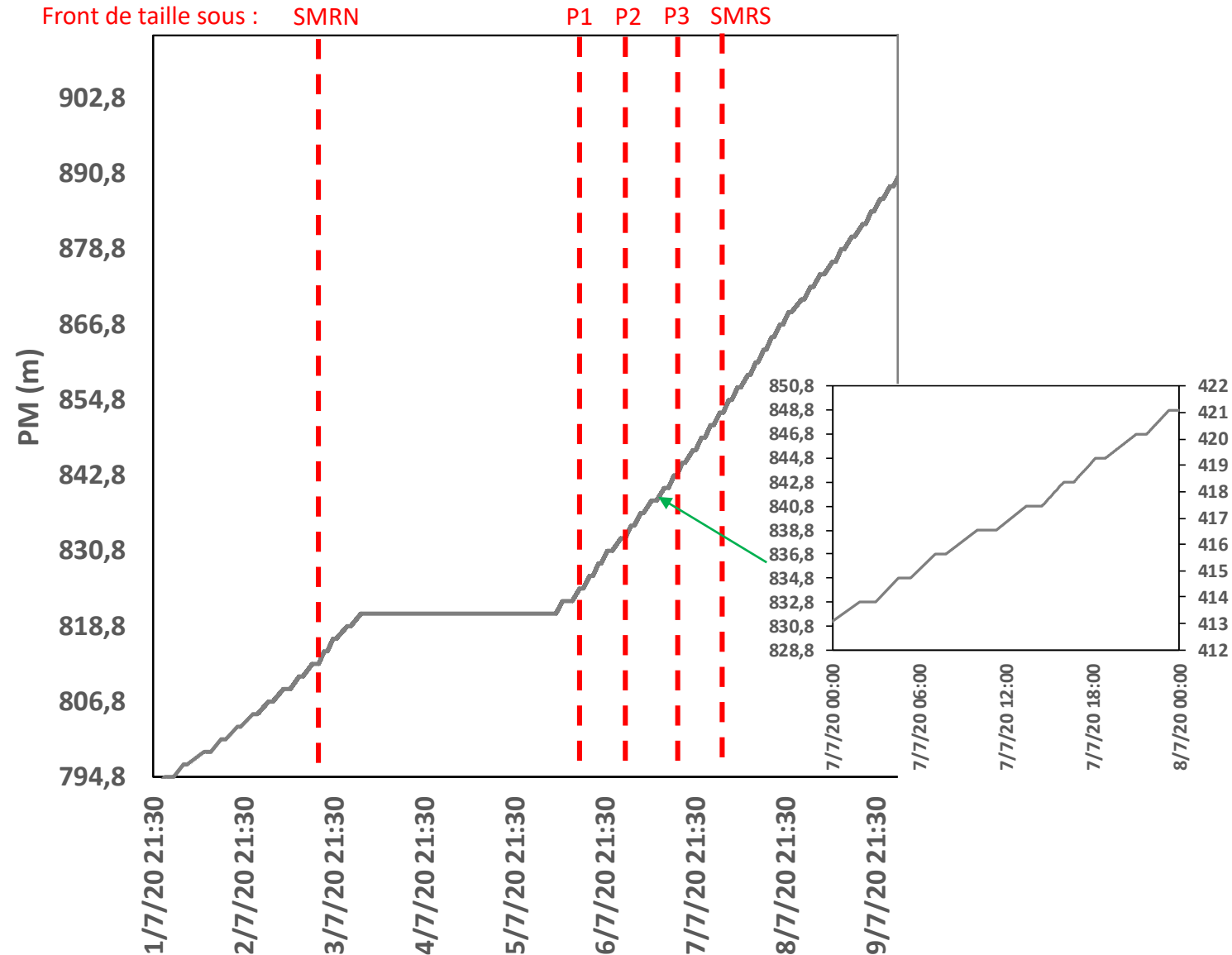
DESCRIPTION ET PROCESSUS



- TBM à pression de terre, Herrenknecht
- Bouclier (11 m) dont le diamètre varie entre 9.87 m au front à 9.80 à la fin de la jupe
- Revêtement : anneaux de 7 voussoirs en BA
- Vide annulaire de 18.5 cm, soit un volume théorique de $11.8\text{ m}^3/\text{anneau}$
- Instrumentation : mesures de pression dans la chambre, forces de poussées, volumes et pressions d'injection, etc

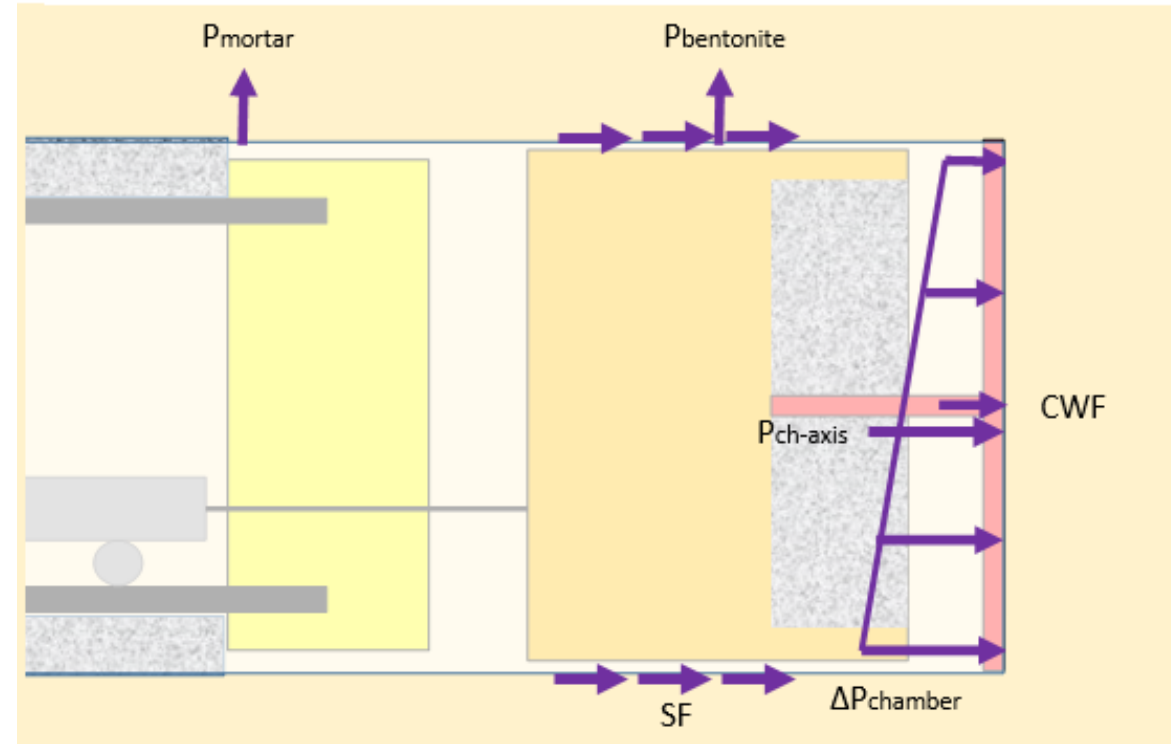
AVANCEMENT TBM

- Passage sous le site expérimental : 01-09/07/2020
- Point métrique de la roue de coupe en fonction du temps et de la position du front de taille
- Vitesse moyenne : environ 18 m/j

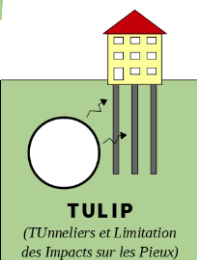
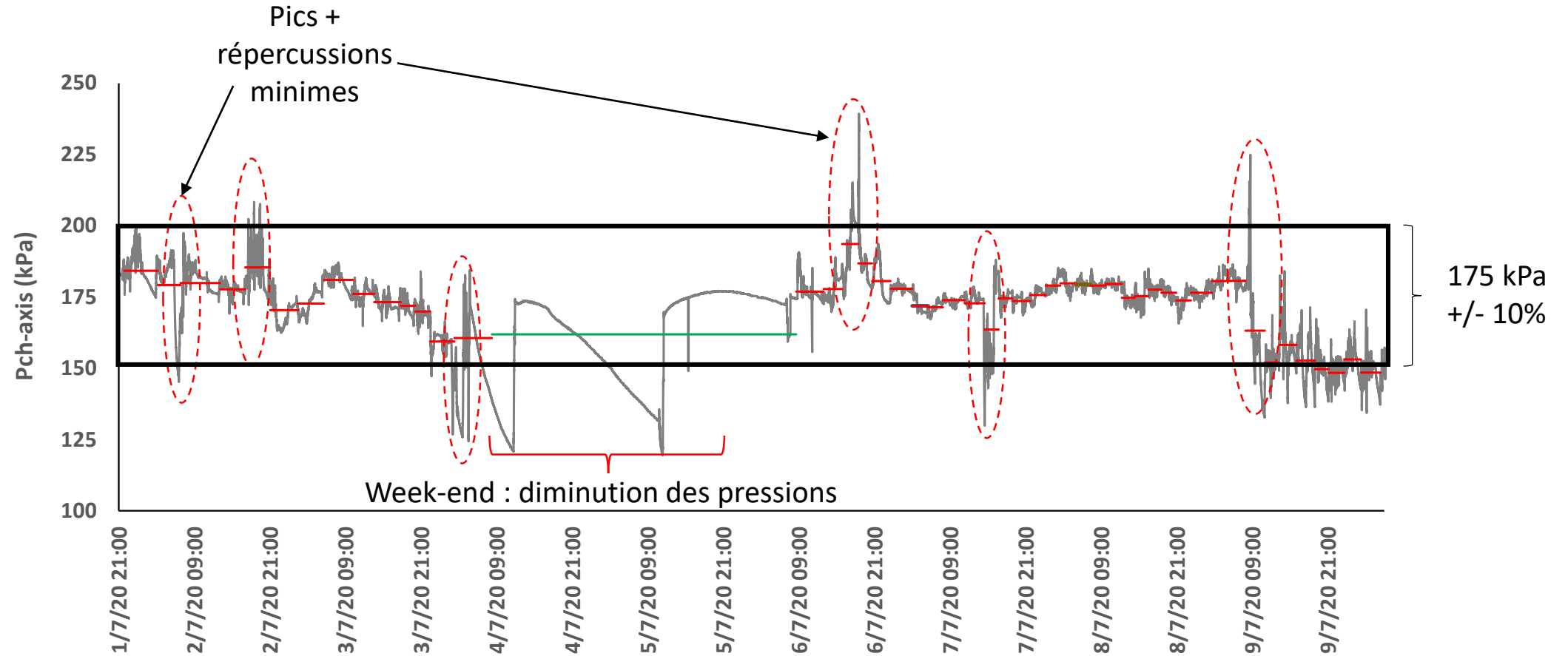


EFFORTS ET PRESSIONS APPLIQUÉS PAR LE TBM SUR LE TERRAIN

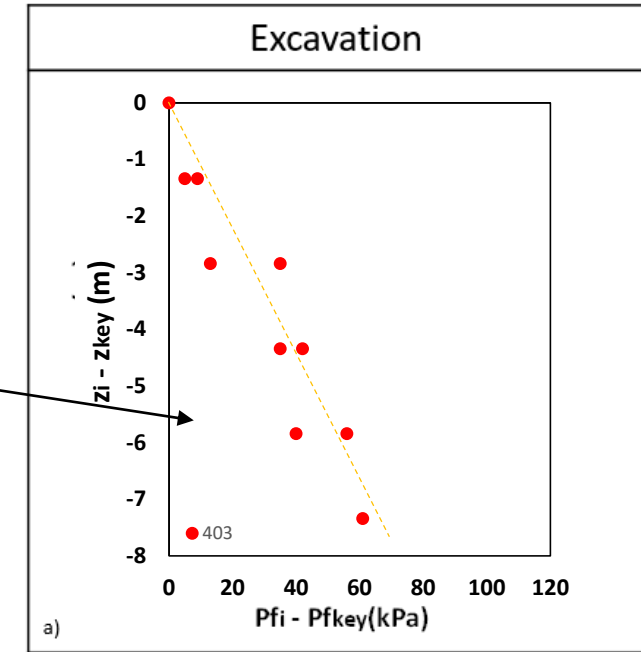
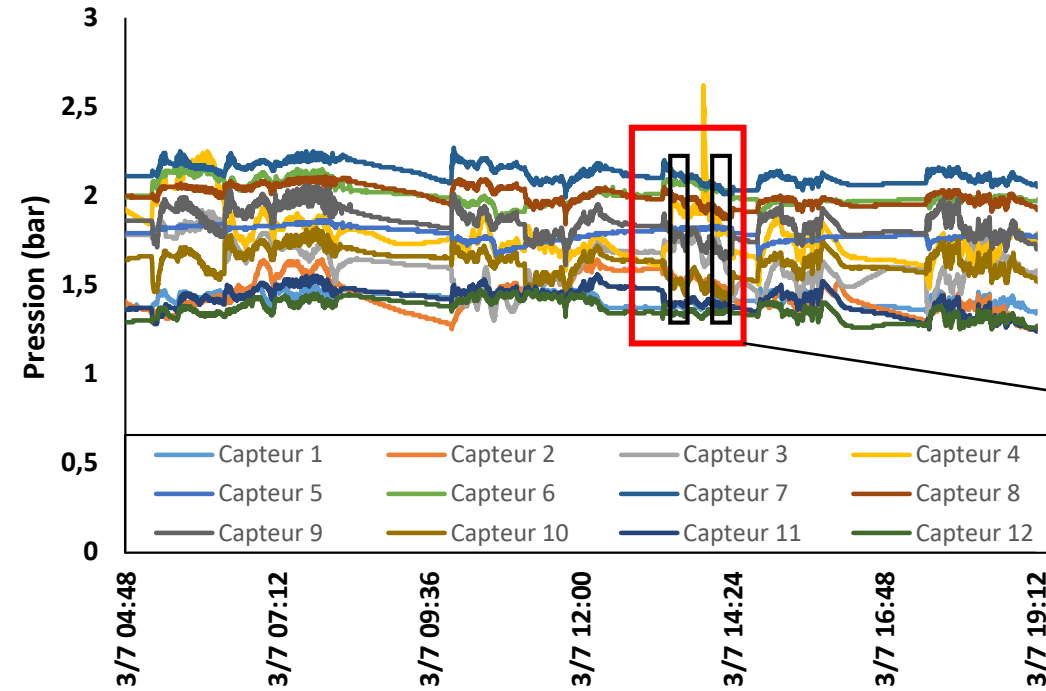
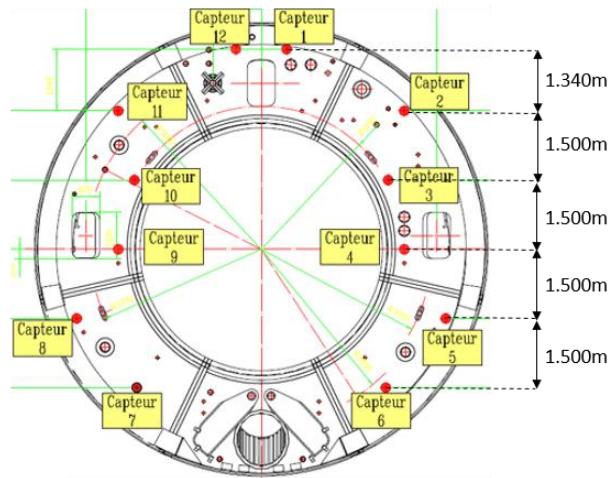
- $P_{ch-axis}$: pression exercée par le matériau dans la chambre
- CWF : effort de contact exercé par la roue de coupe sur le sol
- SF : effort de frottement entre le sol et le bouclier
- P_{mortar} : pression d'injection de mortier
- $P_{bentonite}$: pression d'injection de bentonite



PRESSIION EXERCÉE PAR LE MATÉRIAU DANS LA CHAMBRE



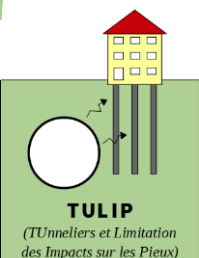
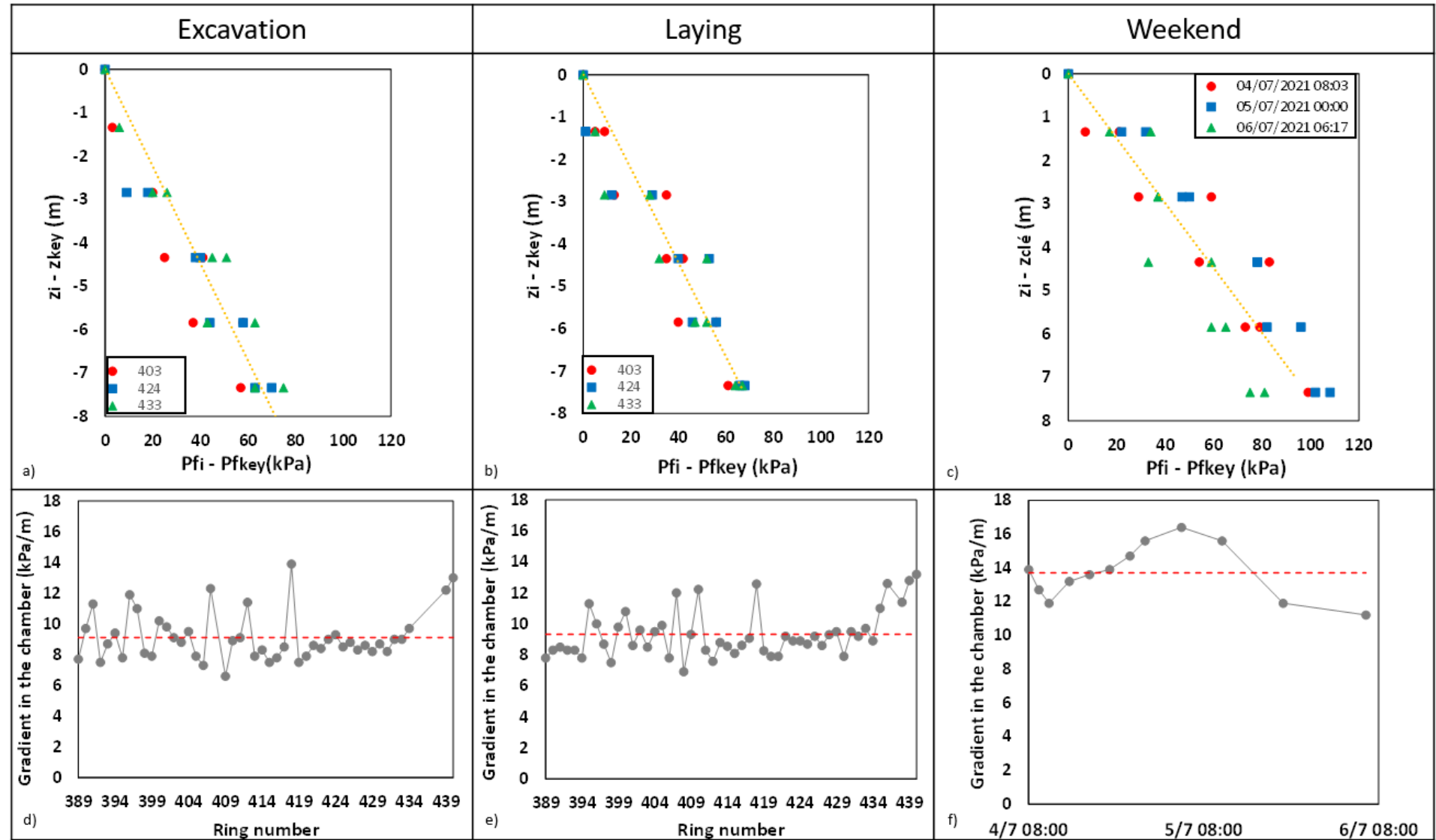
GRADIENT DE PRESSION DANS LA CHAMBRE D'ABATTAGE



Evolution de la pression mesurée par chacun des capteurs durant l'excavation de l'anneau 403

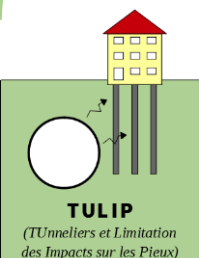
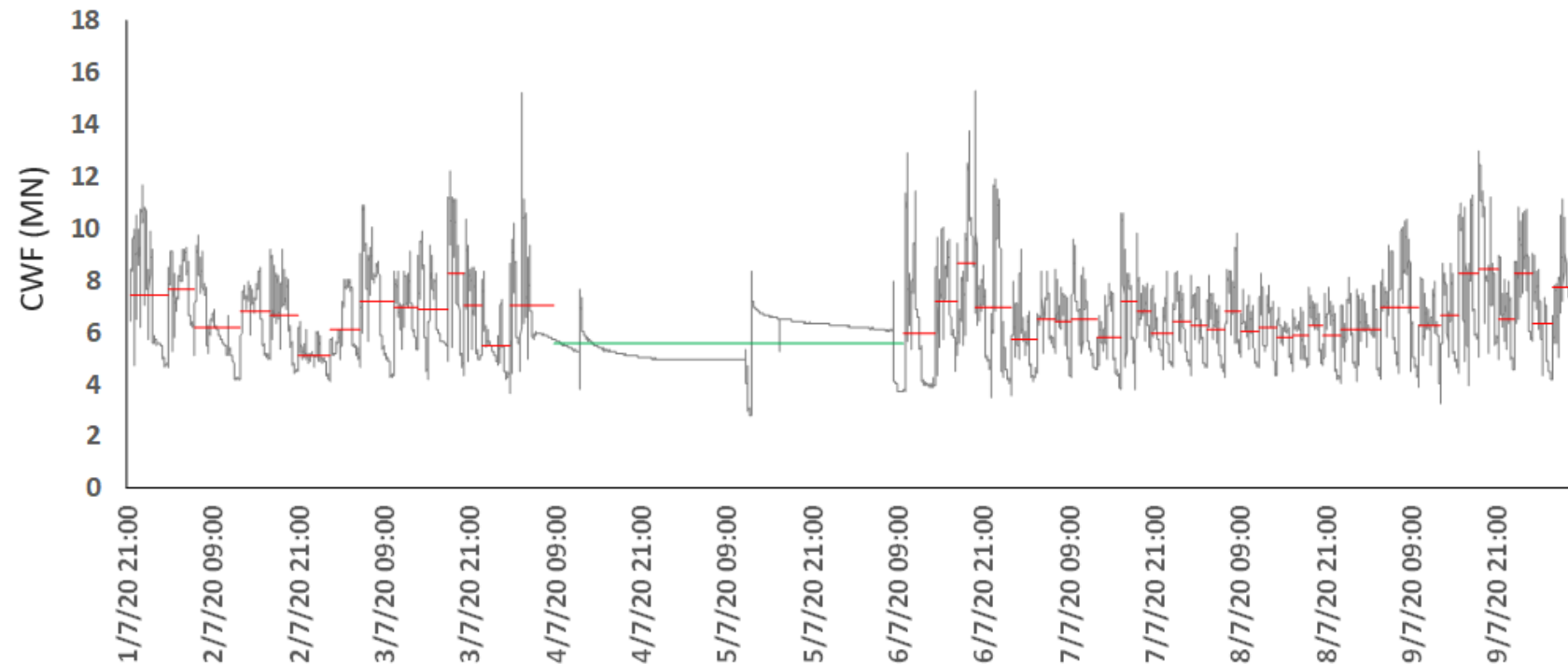
GRADIENT DE PRESSION DANS LA CHAMBRE D'ABATTAGE

- Creusement + pose : gradient compris entre 8 et 10 kPa/m
- Week-end : gradient compris entre 12 et 15 kPa/m

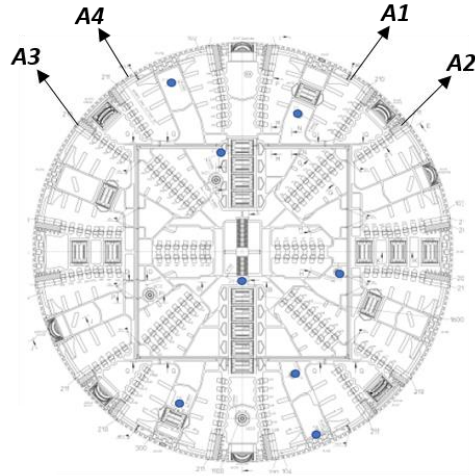


EFFORT DE CONTACT EXERCÉ PAR LA ROUE DE COUPE SUR LE SOL

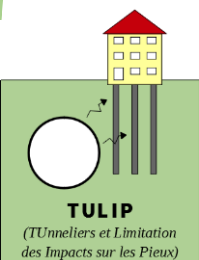
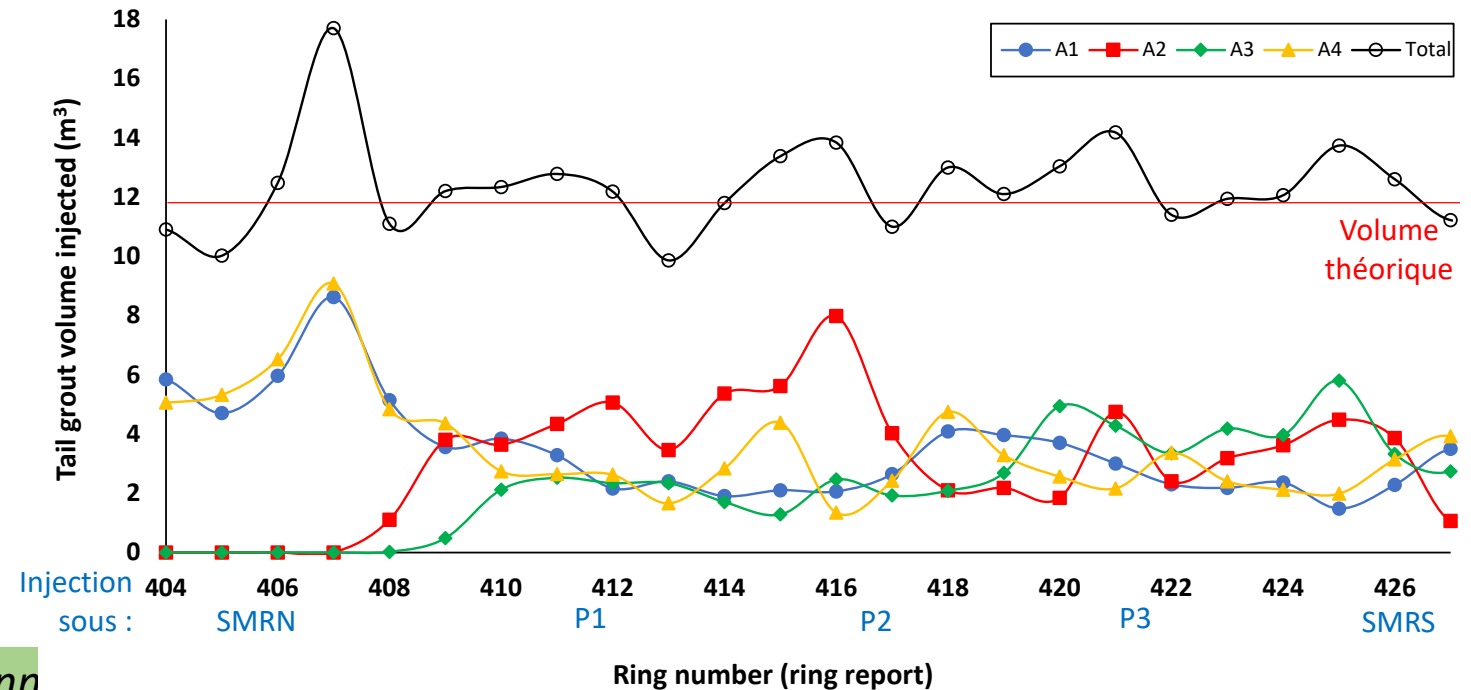
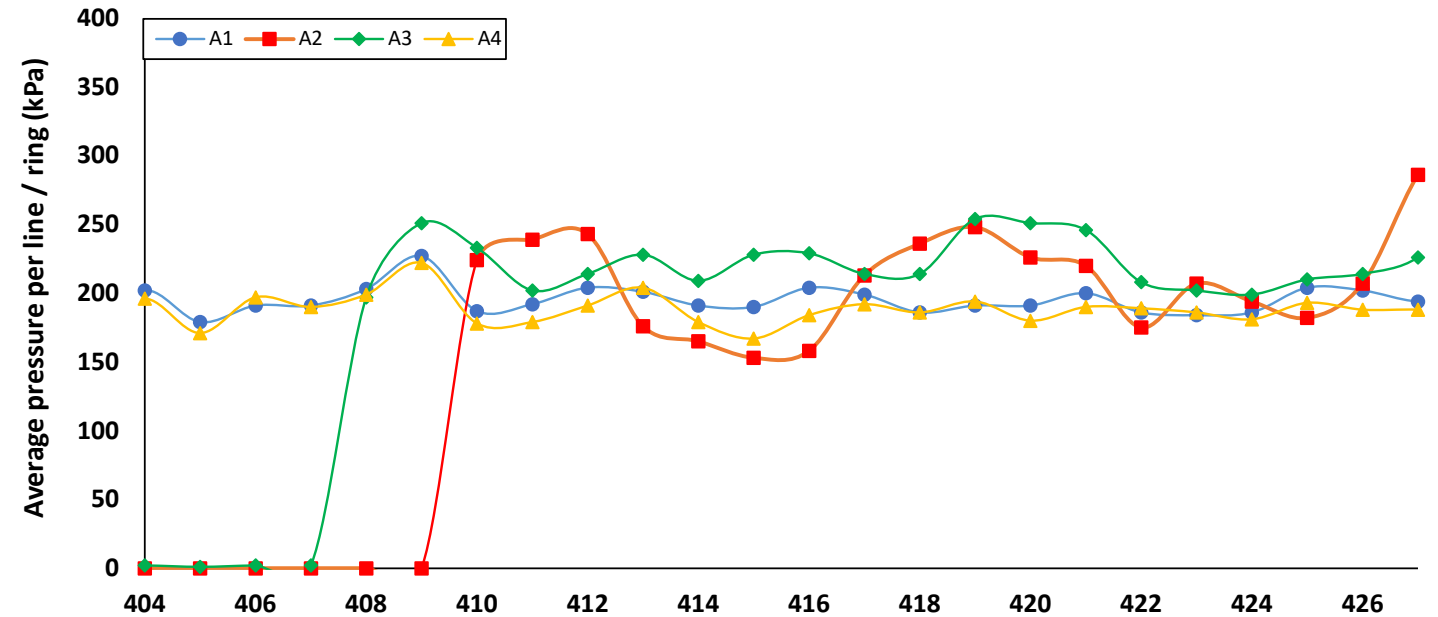
- Pressions comprises entre 5000 kN et 9000 kN
- Pression exercée par la roue de coupe sur le sol + pression exercée par le matériau dans la chambre $\approx 260 \text{ kPa}$ ($\approx \sigma_{h0\text{-axe}} = 250 \text{ kPa}$)



PRESSIONS D'INJECTION DE MORTIER

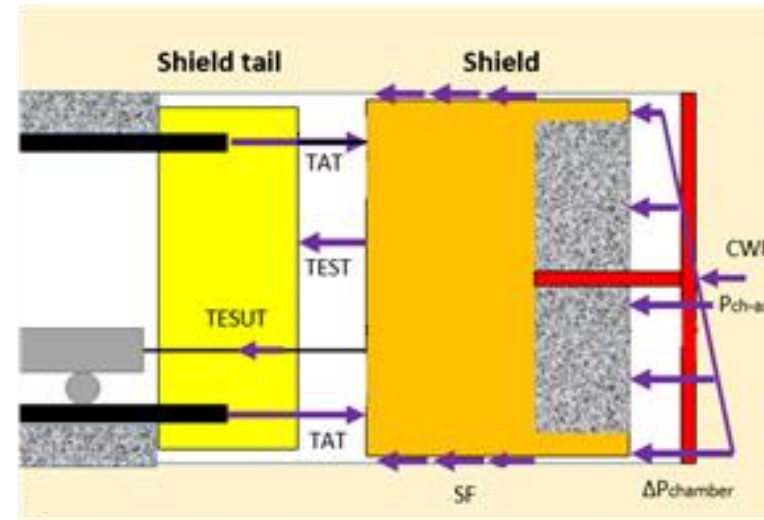


- Pressions homogènes : entre 150 et 250 kPa
- Volume moyen globalement compris entre 10 et 14 m³



EFFORTS ET PRESSIONS EXERCÉS PAR LE TERRAIN SUR LE TBM

		TULIP
Site	Diameter D (m)	9.87
	Overburden C (m)	16
	Excavated ground nature	Clayey sands (BS), Marly limestones (MS)
Loads on the ground	$P_{ch-axis}$ (kPa)	175 ± 25
	$\Delta P_{chamber}$ (kPa/m)	$8,7 \pm 0,7$
	CWF (kN)	$7\ 000 \pm 2\ 000$
	$(P_{ch-axis} + CWF/S) / \sigma_{h0-axis}^{**}$	$110\% \pm 20\%$
	$P_{bentonite}$ (kPa)	0
	P_{mortar} (kPa)	200 ± 25
	$P_{mortar} / \sigma_{v0-crown}$	$65\% \pm 10\%$
Distribution of thrust force	TAT (kN)	$22\ 000 \pm 5\ 000$
	$P_{ch-axis} \cdot S / TAT$	$\approx 60\%$
	CWF / TAT	$\approx 30\%$
	$[TEST+TESUT] / TAT$	$\approx 10\%$
	SF / TAT	$\approx 0\%$
Other parameters	v_{adv} (mm/min)	22 ± 2
	ω_{cw} (rpm)	± 1.5
	CWT (kN.m)	$4\ 000 \pm 3\ 000$



Poussée totale d'avancement équilibrée par :

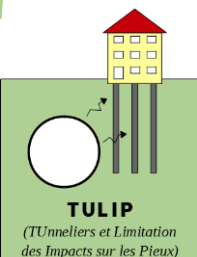
- La pression dans la chambre d'abattage : 60%
- L'effort de contact de la roue de coupe sur le sol : 30%
- La force de traction de la jupe et du train suiveur : 10%
- L'effort de frottement entre le sol et le bouclier : 0%

EFFORTS ET PRESSIONS EXERCÉS PAR LE TERRAIN SUR LE TBM

		TULIP	Paris L12-S1	Paris T6-S1	Paris T6-S3
Site	Diameter D (m)	9.87	9.17	9.17	9.17
	Overburden C (m)	16	14	18	15
	Excavated ground nature	Clayey sands (BS), Marly limestones (MS)	Marls (SOL), Clayey sands (BS), Marly limestones (MS)	Gypsum marls	Clayey sands (BS), Marly limestones (MS)
Loads on the ground	$P_{ch-axis}$ (kPa)	175 ± 25	150 ± 20	170 ± 25	220 ± 20
	$\Delta P_{chamber}$ (kPa/m)	8,7 ± 0,7	15*	15*	15*
	CWF (kN)	7 000 ± 2 000	6 500 ± 1 500	8 000 ± 2 000	6 000 ± 1 000
	$(P_{ch-axis} + CWF/S) / \sigma_{h0-axis}^{**}$	110% ± 20%	140% ± 20%	130% ± 20%	160% ± 20%
	$P_{bentonite}$ (kPa)	0	0	0	190*
	P_{mortar} (kPa)	200 ± 25	180 ± 30	270 ± 30	320 ± 60
	$P_{mortar} / \sigma_{v0-crown}$	65% ± 10%	70% ± 10%	80% ± 10%	110% ± 20%
Distribution of thrust force	TAT (kN)	22 000 ± 5 000	25 000 ± 5 000	22 000 ± 2 000	30 000 ± 5 000
	$P_{ch-axis} \cdot S / TAT$	≈ 60%	≈ 40%	≈ 50%	≈ 50%
	CWF / TAT	≈ 30%	≈ 25%	≈ 35%	≈ 35%
	[TEST+TESUT] / TAT	≈ 10%	Not measured	Not measured	Not measured
	SF / TAT	≈ 0%	--	--	--
Other parameters	v_{adv} (mm/min)	22 ± 2	30 ± 10	20 ± 2	25 ± 3
	ω_{CW} (rpm)	± 1.5	± 1,4	± 1,4	± 1,4
	CWT (kN.m)	4 000 ± 3 000	9 000 ± 2000	9 000 ± 3000	11 000 ± 2 000

Conditions de site et de creusement similaires

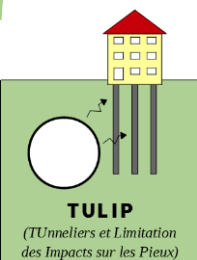
Répartition de la poussée totale d'avancement similaire



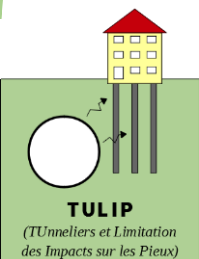
EFFORTS ET PRESSIONS EXERCÉS PAR LE TERRAIN SUR LE TBM

		TULIP	Paris L12-S1	Paris T6-S1	Paris T6-S3
Site	Diameter D (m)	9.87	9.17	9.17	9.17
	Overburden C (m)	16	14	18	15
	Excavated ground nature	Clayey sands (BS), Marly limestones (MS)	Marls (SOL), Clayey sands (BS), Marly limestones (MS)	Gypsum marls	Clayey sands (BS), Marly limestones (MS)
Loads on the ground	$P_{ch-axis}$ (kPa)	175 ± 25	150 ± 20	170 ± 25	220 ± 20
	$\Delta P_{chamber}$ (kPa/m)	8,7 ± 0,7	15*	15*	15*
	CWF (kN)	7 000 ± 2 000	6 500 ± 1 500	8 000 ± 2 000	6 000 ± 1 000
	$(P_{ch-axis} + CWF/S) / \sigma_{h0-axis}^{**}$	110% ± 20%	140% ± 20%	130% ± 20%	160% ± 20%
	$P_{bentonite}$ (kPa)	0	0	0	190*
	P_{mortar} (kPa)	200 ± 25	180 ± 30	270 ± 30	320 ± 60
	$P_{mortar} / \sigma_{v0-crown}$	65% ± 10%	70% ± 10%	80% ± 10%	110% ± 20%
Distribution of thrust force	TAT (kN)	22 000 ± 5 000	25 000 ± 5 000	22 000 ± 2 000	30 000 ± 5 000
	$P_{ch-axis} \cdot S / TAT$	≈ 60%	≈ 40%	≈ 50%	≈ 50%
	CWF / TAT	≈ 30%	≈ 25%	≈ 35%	≈ 35%
	[TEST+TESUT] / TAT	≈ 10%	Not measured	Not measured	Not measured
	SF / TAT	≈ 0%	--	--	--
Other parameters	v_{adv} (mm/min)	22 ± 2	30 ± 10	20 ± 2	25 ± 3
	ω_{cw} (rpm)	± 1.5	± 1,4	± 1,4	± 1,4
	CWT (kN.m)	4 000 ± 3 000	9 000 ± 2000	9 000 ± 3000	11 000 ± 2 000

Couple plus faible sur le projet TULIP



Réponse du terrain au creusement



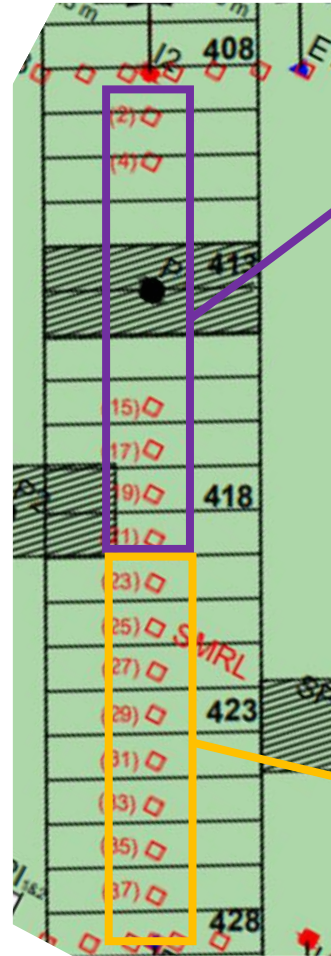
EN SURFACE : PROFILS LONGITUDINAUX DES CUVETTES DE TASSEMENTS

- Une approximation via une gaussienne cumulée :

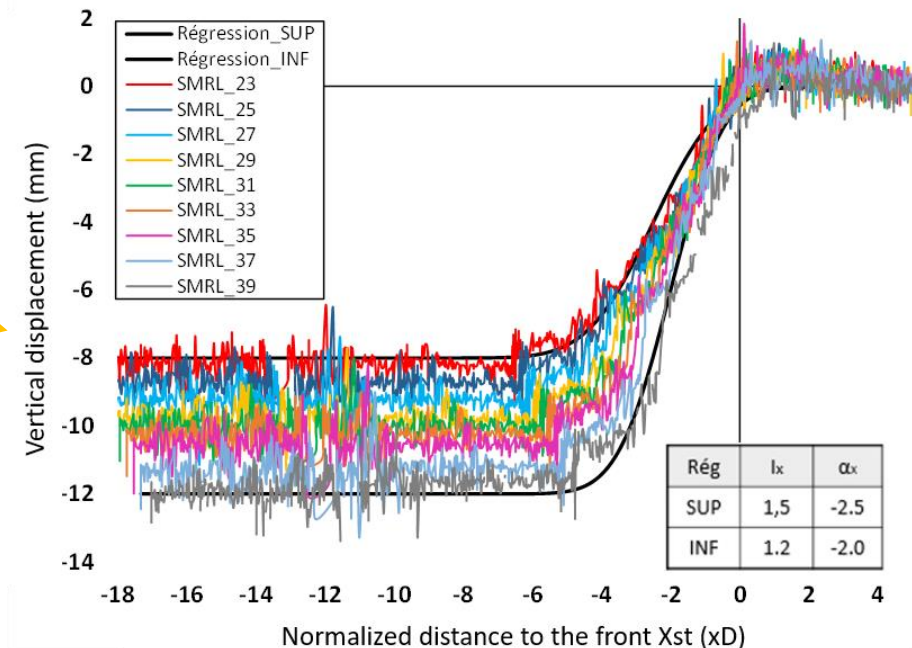
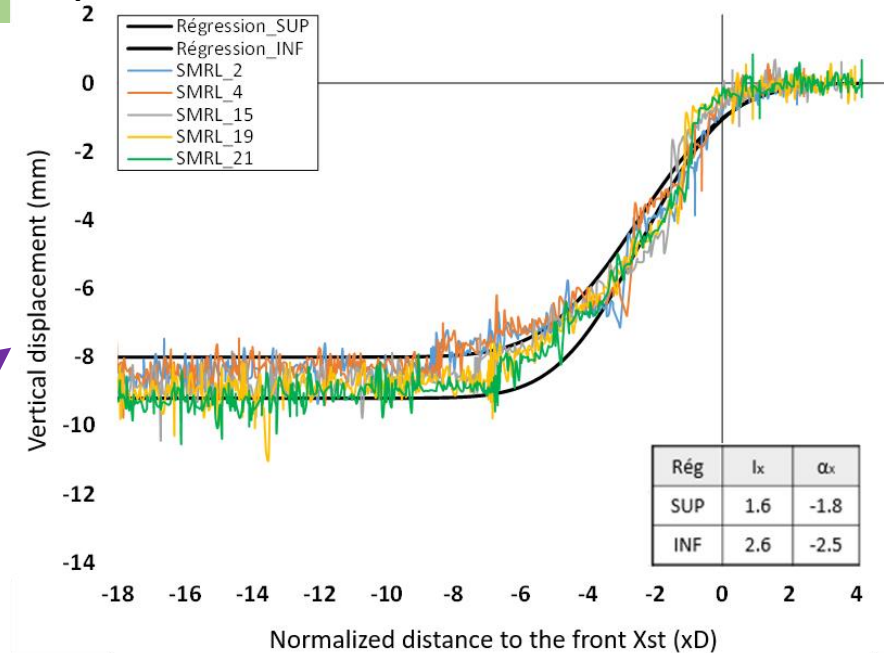
$$U_z(X) = U_{z,max} \cdot \frac{1}{I_X \sqrt{2\pi}} \cdot \int_{X_{st}}^{+\infty} e^{-\frac{(X_1 - \alpha_X)^2}{2I_X^2}} dX_1$$

(Attewell & Woodman, 1982 ; adaptée par Berthoz et al, 2018)

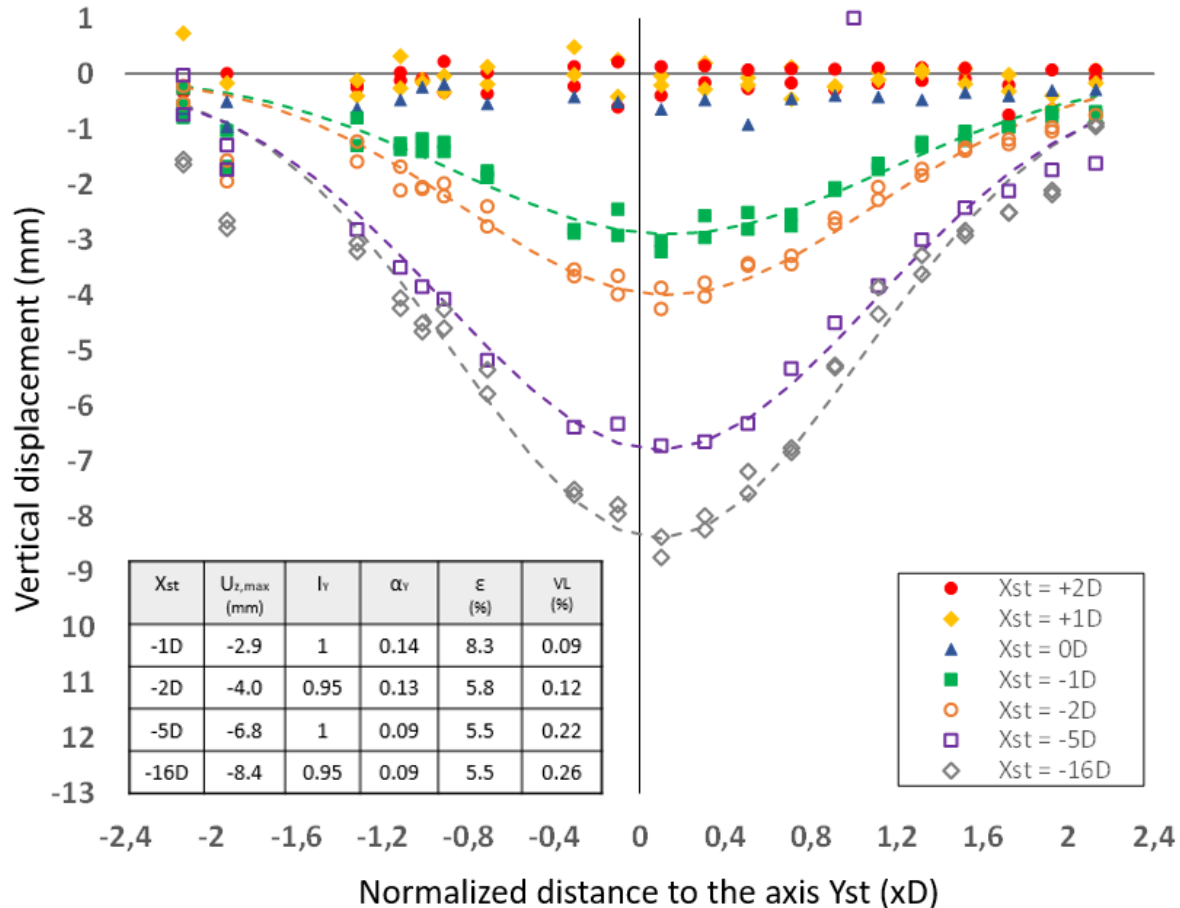
- Amplitude finale des tassements comprise entre 8 et 12 mm
- Tassement maximal atteint pour une distance au front comprise entre -6D et -8D



Réponse du terrain



EN SURFACE : PROFILS TRANSVERSAUX DES CUVETTES DE TASSEMENTS

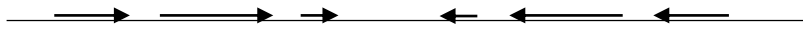


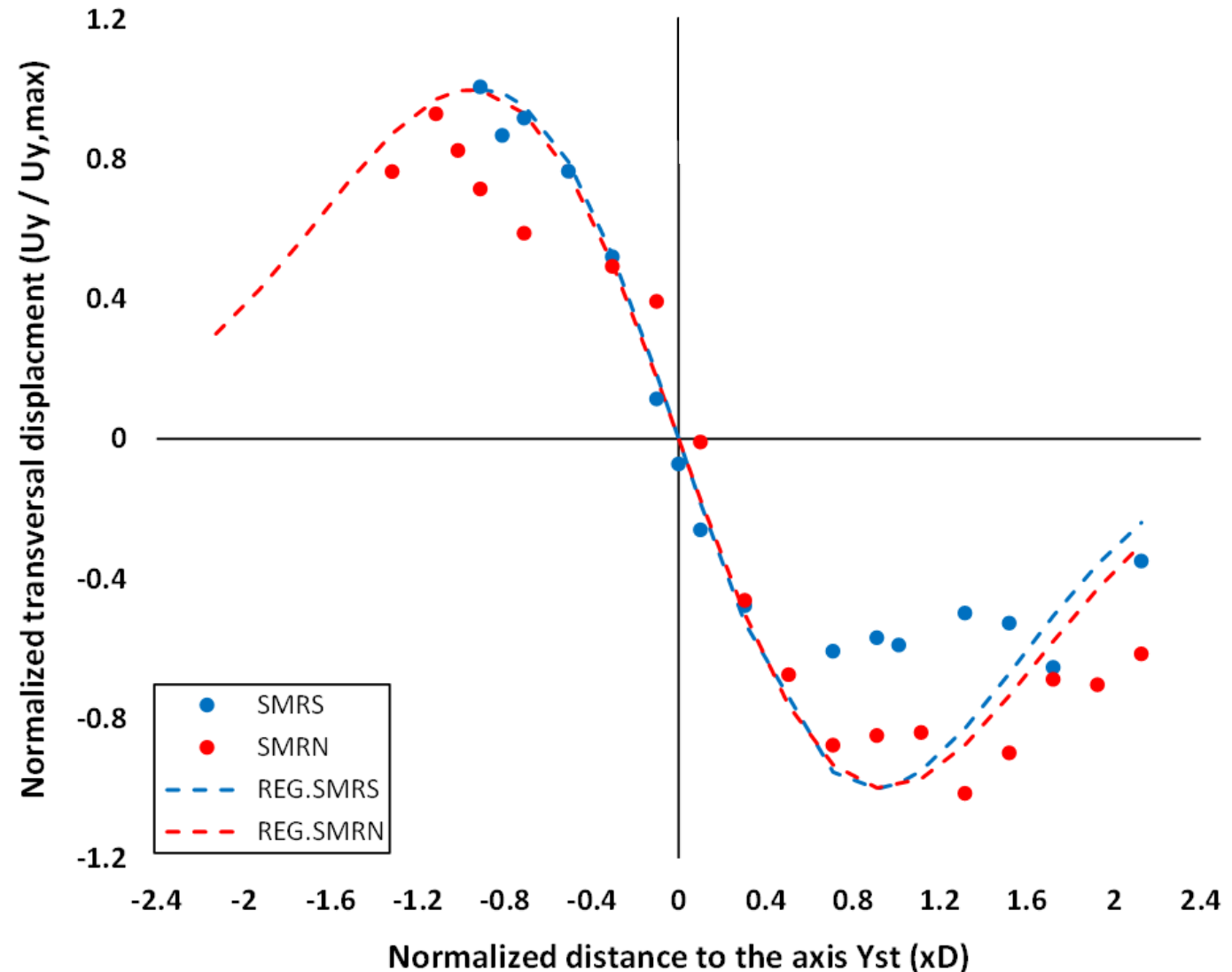
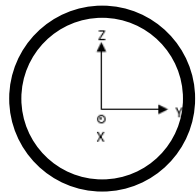
SMR Nord

- $U_z(Y_{st}) = U_{z,X_{st}} \cdot e^{\frac{-(Y_{st}-\alpha_Y)^2}{2I_Y^2}}$ (Peck, 1969)
- Bon accord avec le retour d'expérience de Mair & Taylor (1997)
- $i_Y = I_Y D \in [0.9D ; 1D]$
- $V_L \in [0.09\% ; 0.34\%]$

EN SURFACE : DÉPLACEMENTS HORIZONTAUX DANS LA DIRECTION TRANSVERSALE

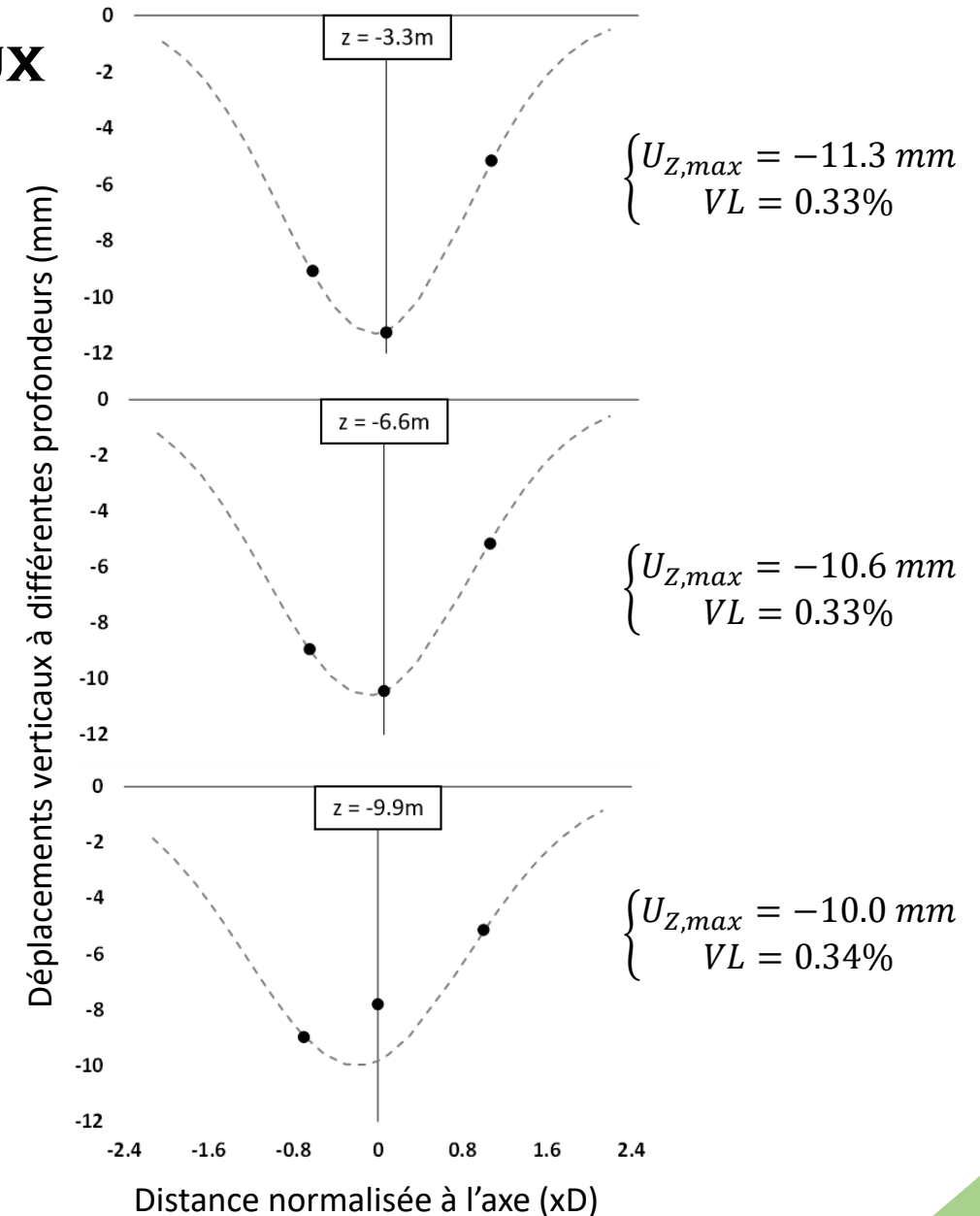
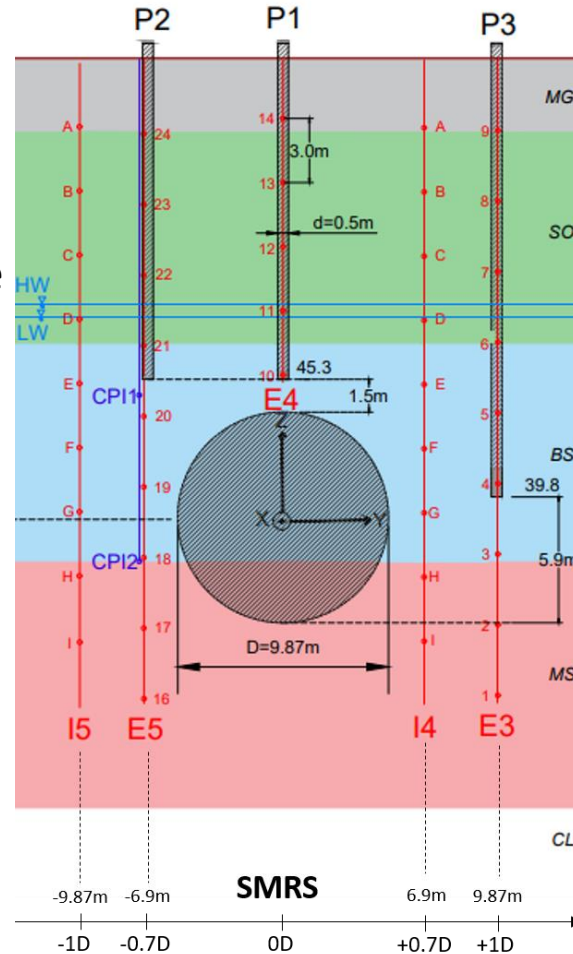
- $\frac{U_y}{U_{y,max}} = 1.65 \frac{Y_{st}}{I_Y} e^{\frac{-Y_{st}^2}{2I_Y^2}}$ (Mair & Taylor, 1997)
- Déplacements du terrain vers l'axe du tunnel
- Déplacements nuls dans l'axe, maximaux en $Y_{st} = +/-I_Y$

TN 

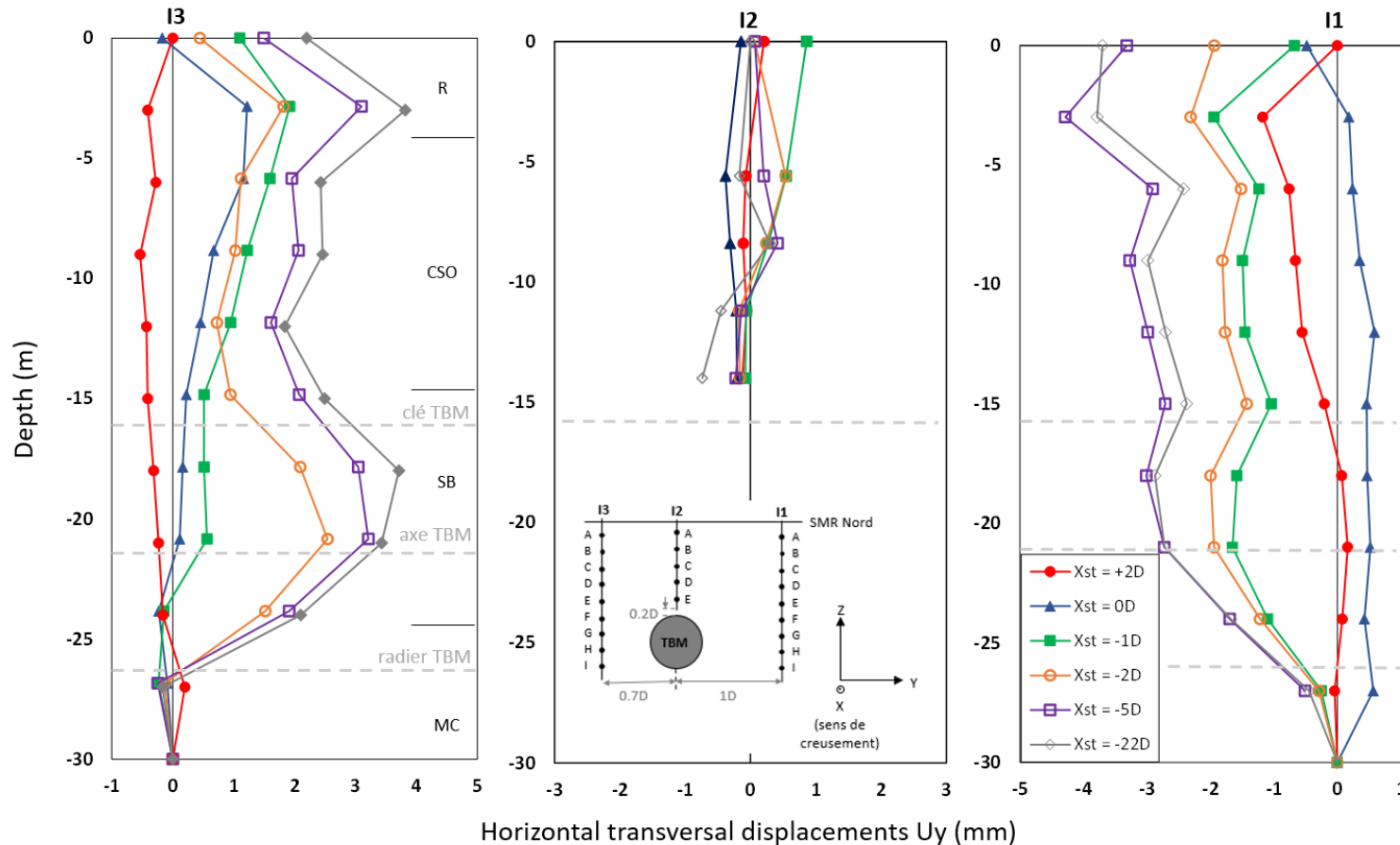


EN PROFONDEUR : DÉPLACEMENTS VERTICAUX

- Déplacements verticaux des extensomètres de la SMR Sud pour les 3 niveaux de jauge sous la surface
- Gaussiennes de Peck à partir de 3 points de mesure
- Pertes de volume conservées sur toute la hauteur de couverture

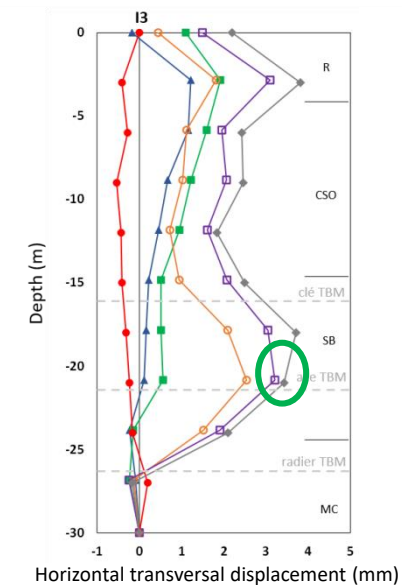
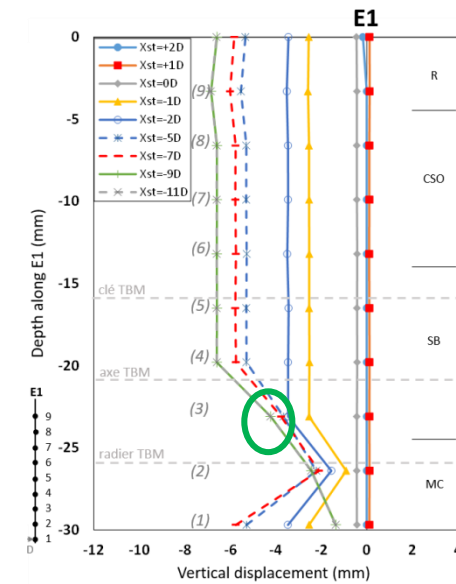
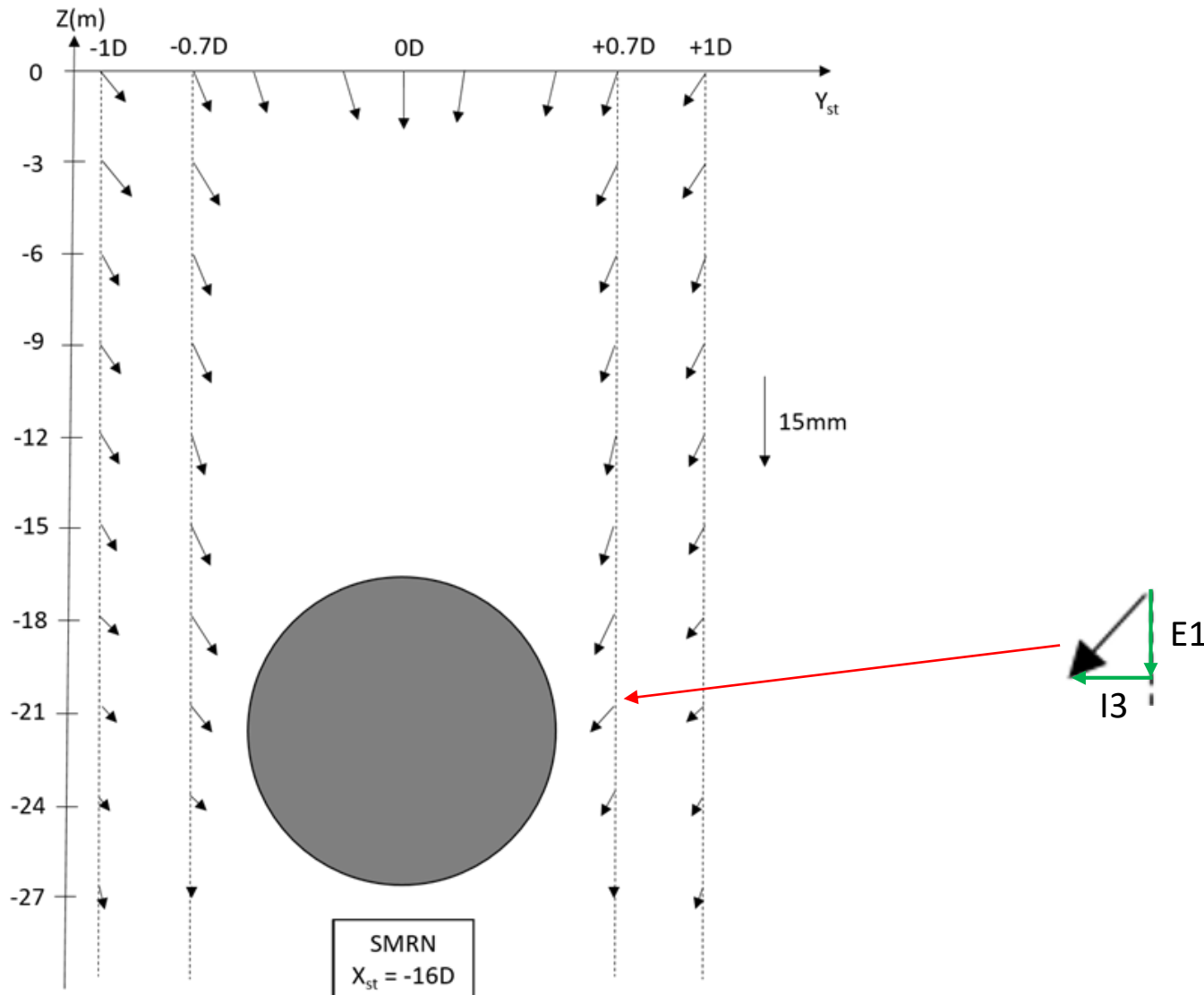


EN PROFONDEUR : DÉPLACEMENTS HORIZONTAUX DANS LA DIRECTION TRANSVERSALE

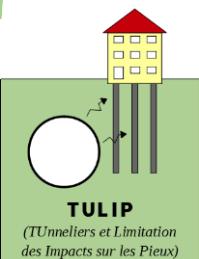


- Déplacements globalement faibles
- Apparition des déplacements dans la couverture au passage du front
- Augmentation de la convergence au débouché de la jupe (-1D) puis stabilisation à -5D

CHAMPS DES DÉPLACEMENTS DANS LE TERRAIN DÉDUITS DES DIFFÉRENTES MESURES



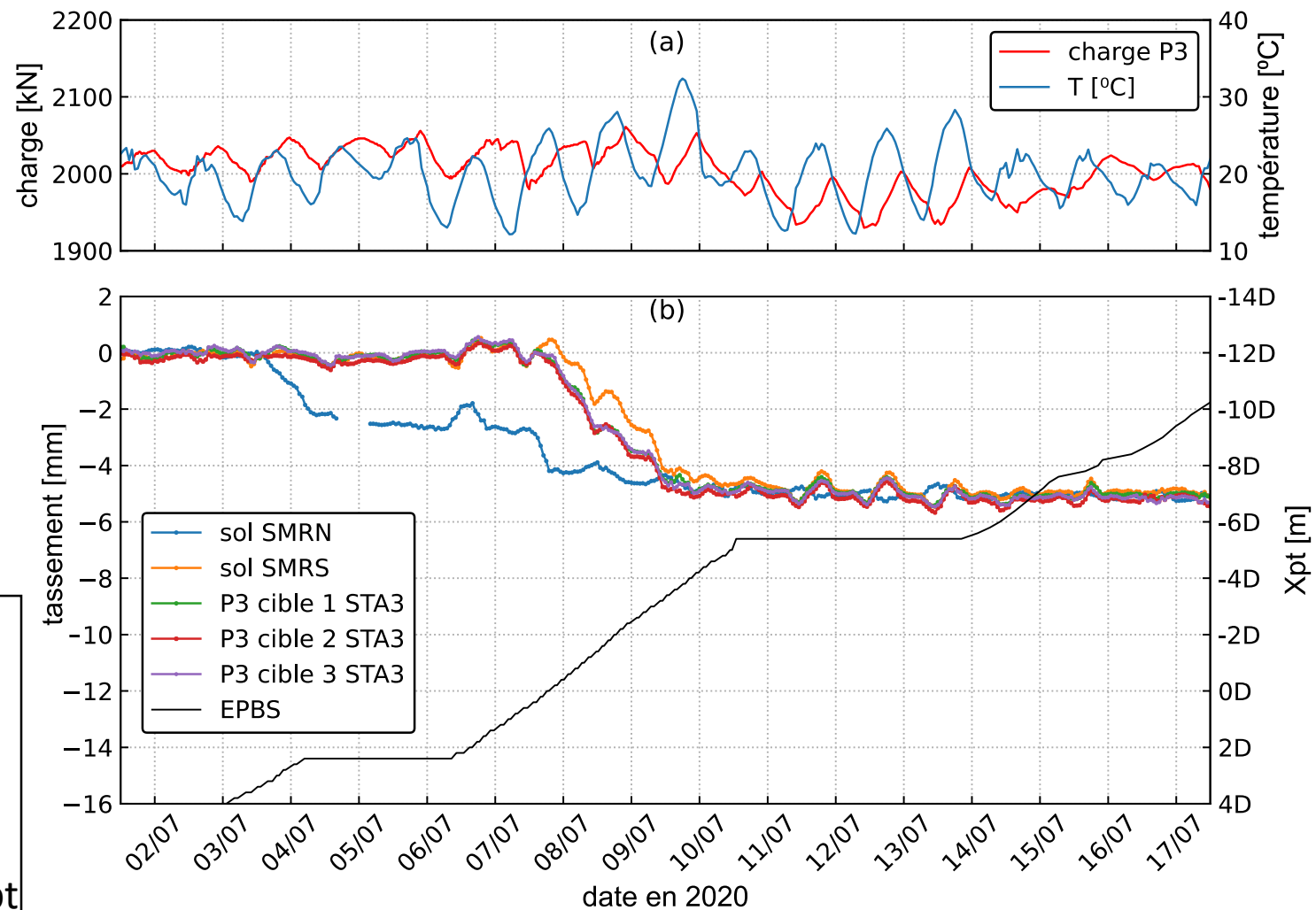
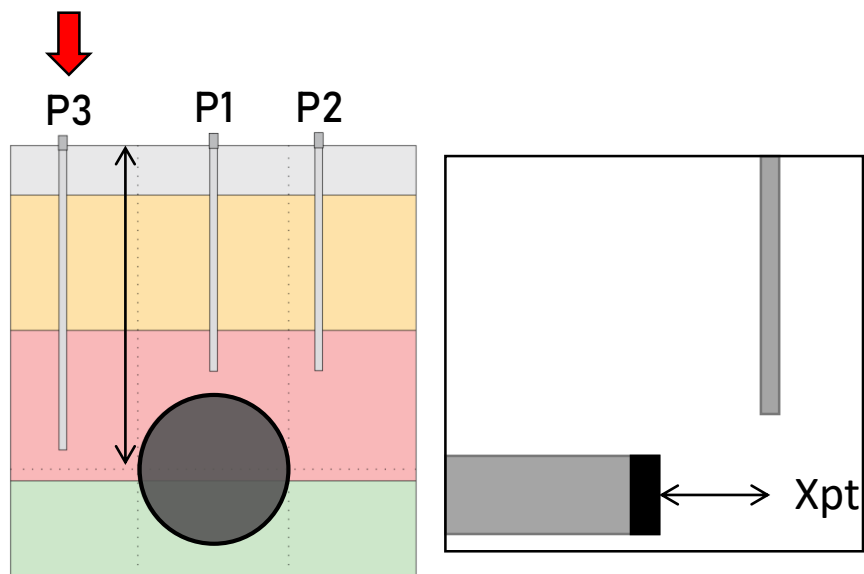
Réponse des pieux au creusement



DÉPLACEMENTS VERTICAUX

P3

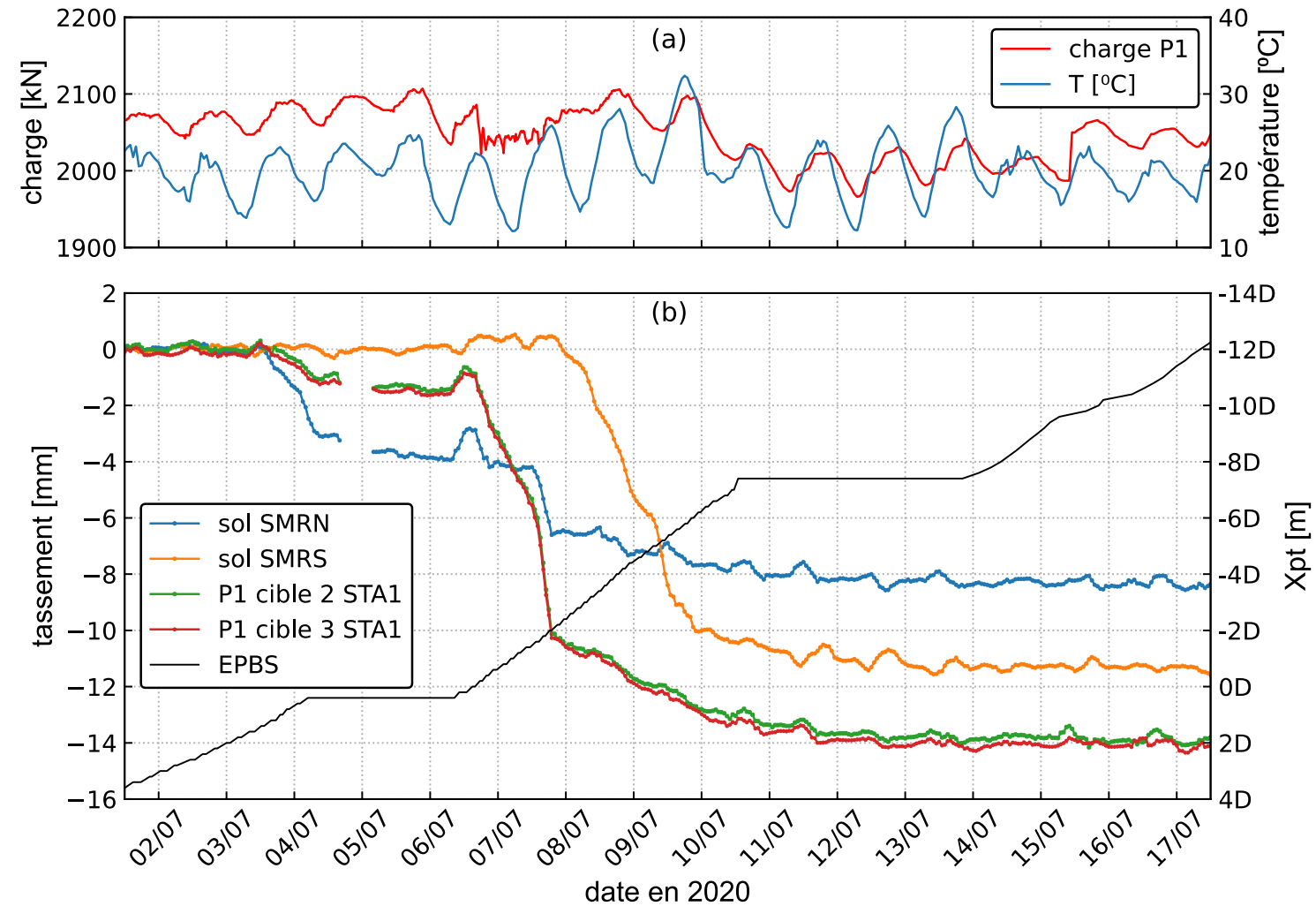
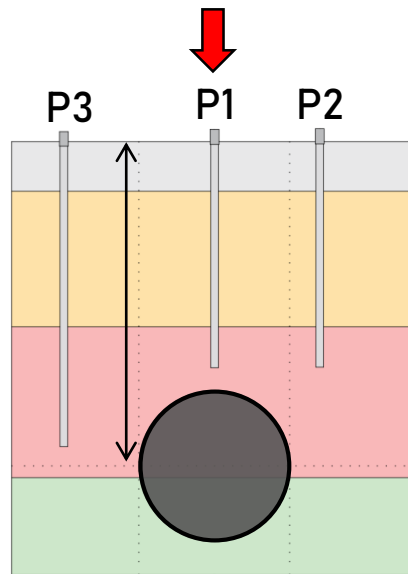
- Tassement maximal: 5 mm
- Pieu tasse de la même manière que le sol
- $R = t_p / t_s$
- $R = 1$



DÉPLACEMENTS VERTICAUX

P1

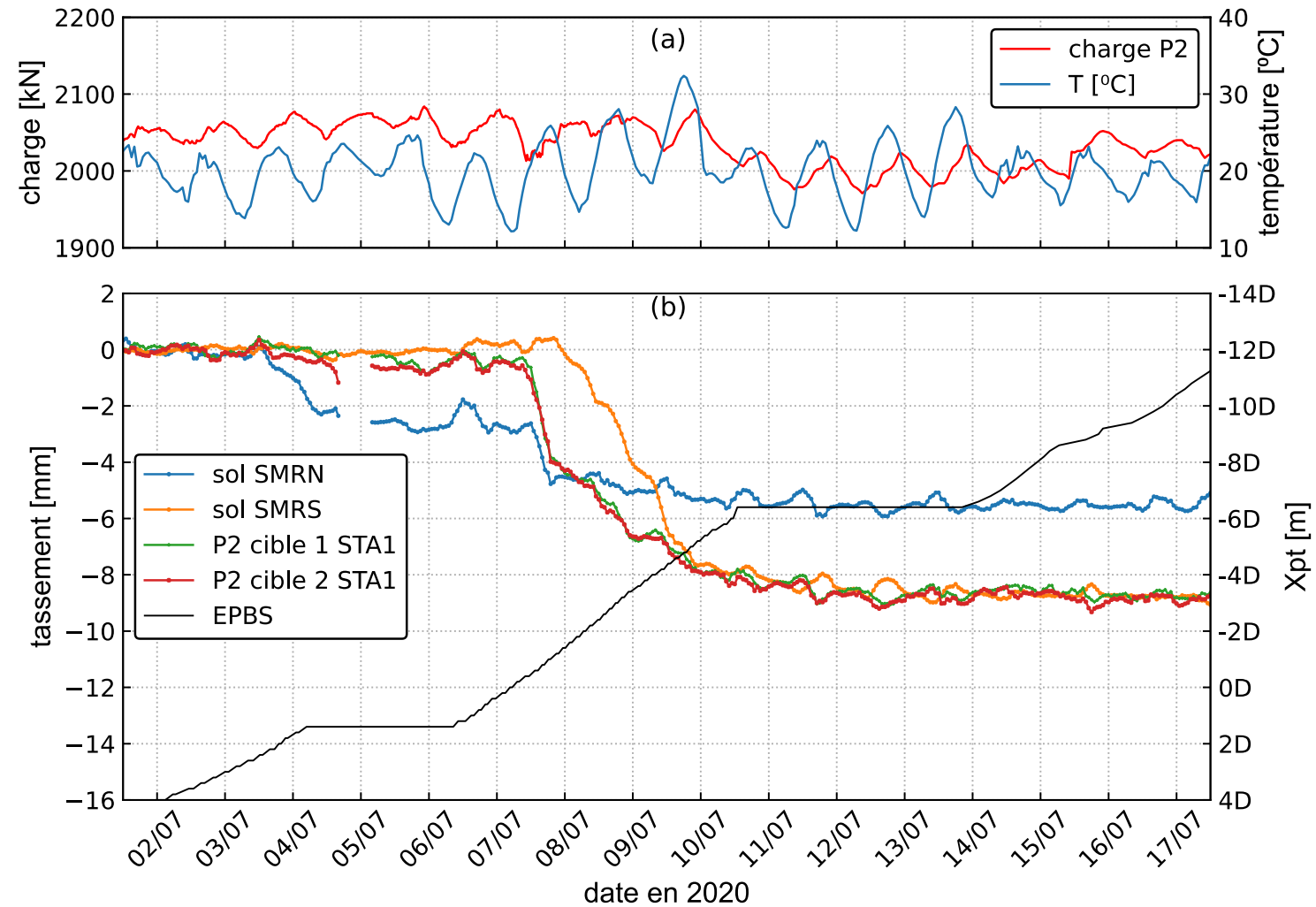
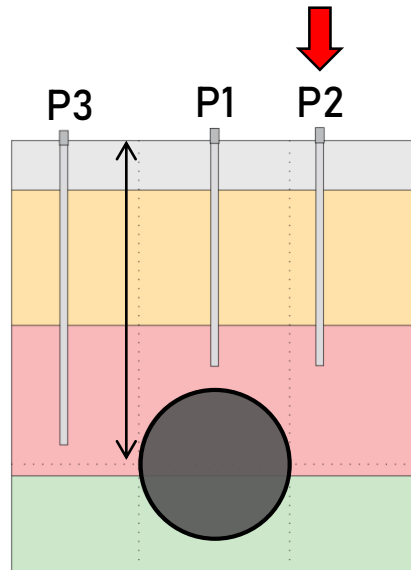
- Tassement maximal: 14 mm
- Pieu tasse plus que le sol
- R entre 1,2 et 1,7



DÉPLACEMENTS VERTICAUX

P2

- Tassement maximal : 9 mm
- Pieu tasse de la même manière que le sol
- R entre 1 et 1,6



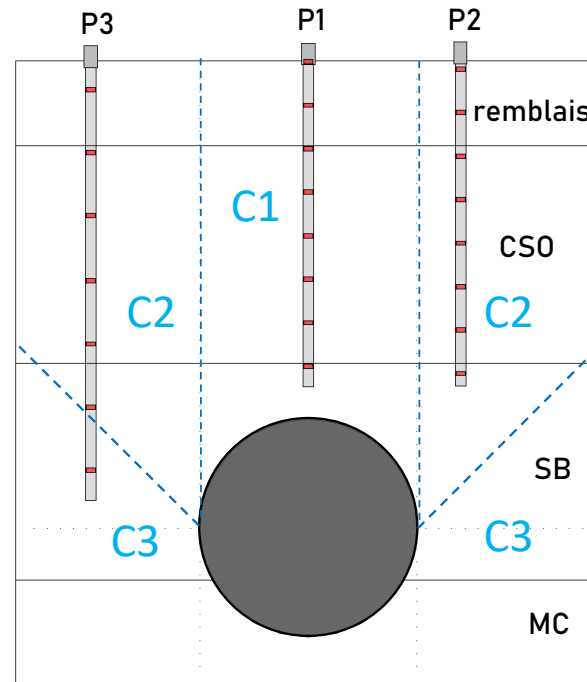
DÉPLACEMENTS VERTICAUX

$$R = t_p / t_s$$

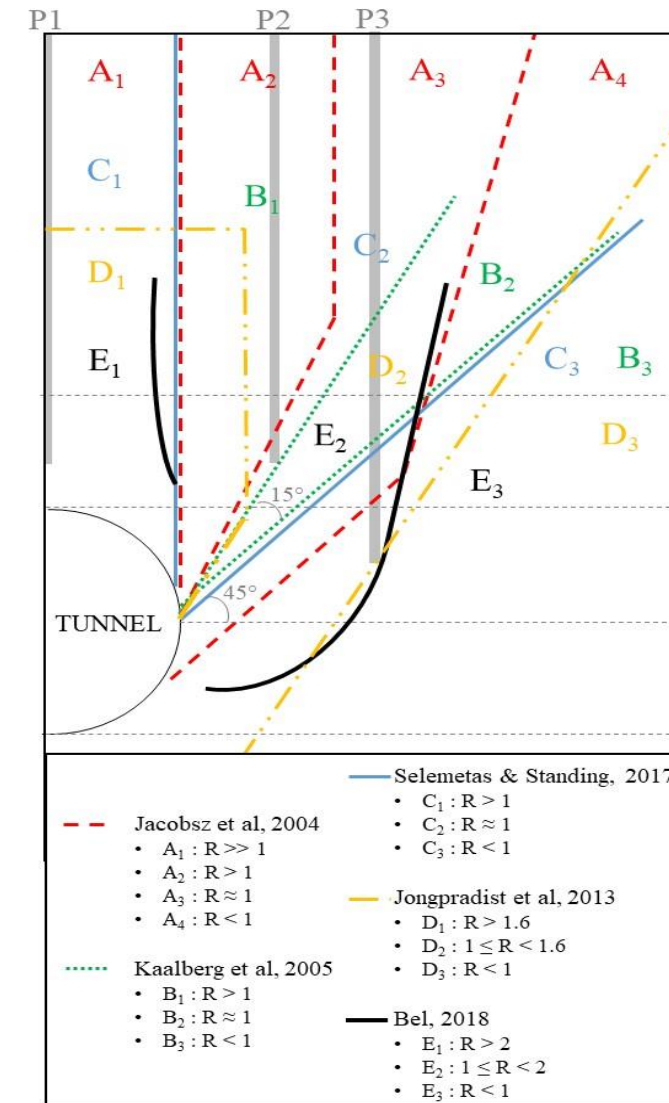
- P1 est situé dans A1 ($R \gg 1$), B1 ($R > 1$), C1 ($R > 1$), D1 ($R > 1.6$) and E1 ($R > 2$).
- P2 est situé dans A3 ($R \approx 1$), B2 ($R \approx 1$), C2 ($R \approx 1$), D2 ($1 < R < 2.6$) and E2 ($1 < R < 2$).
- P3 dans les zones avec $R < 1$

Résultats dans cette étude

- **P1:** R entre 1,2 et 1,7 donc $R > 1$
- **P2:** R entre 1 et 1,6
- **P3:** R légèrement < 1



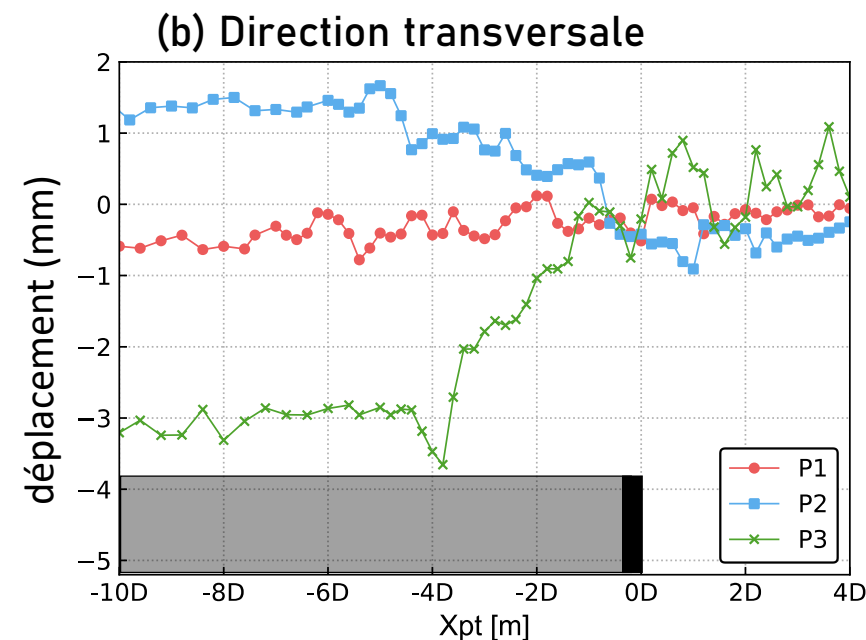
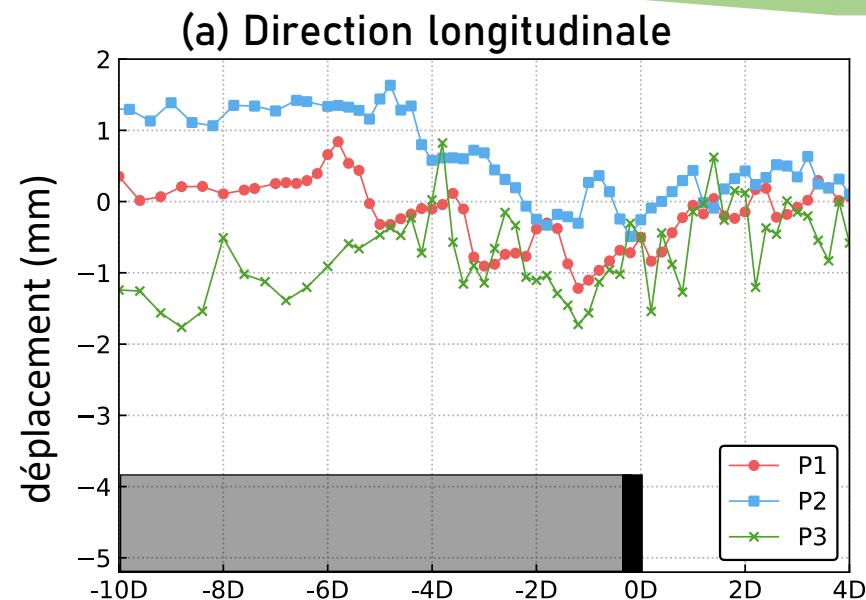
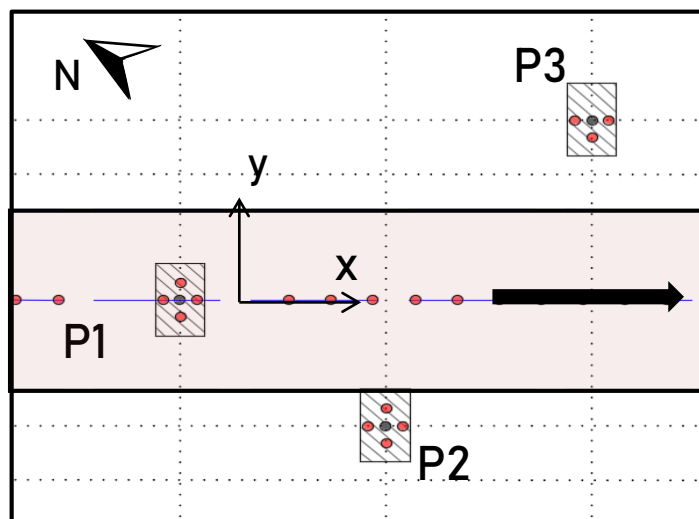
Positions des pieux par rapport aux zones d'influence de Selemetas & Standing (2017)



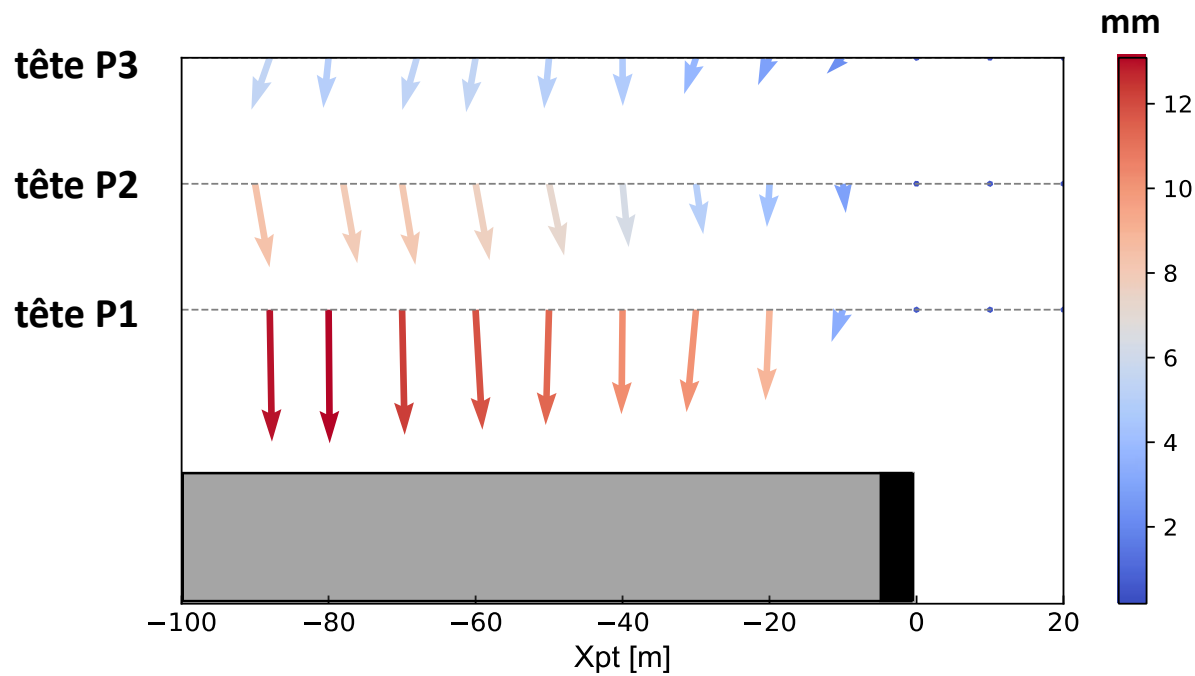
Zones d'influence dans la littérature Michalski et al. (2021)

DÉPLACEMENTS HORIZONTAUX

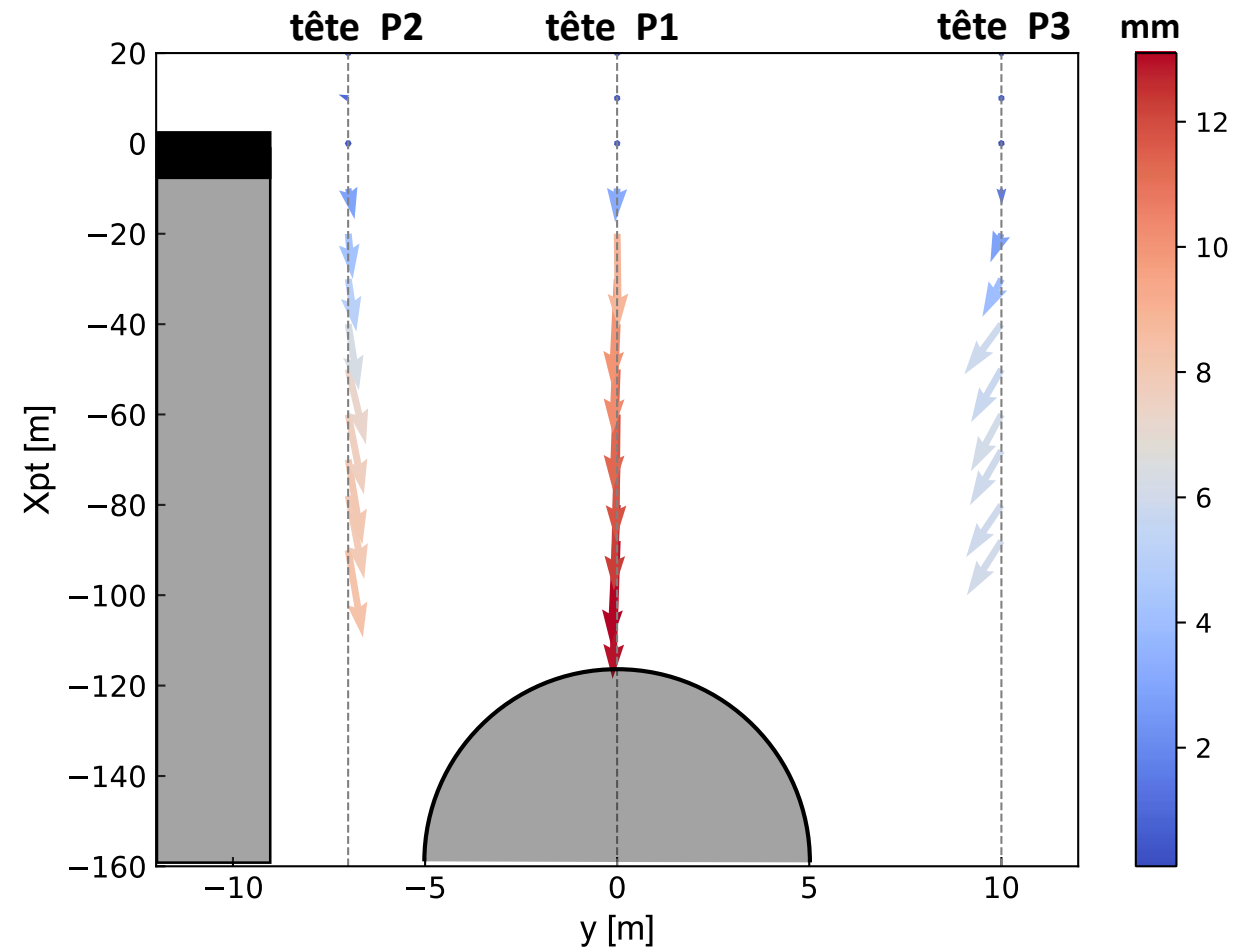
- Direction longitudinale
 - P1 pas de déplacement
 - P2 : +1,2 mm
 - P3 : -1,2 mm
- Direction transversale
 - P1 pas de déplacement
 - P2 : +1 mm
 - P3 : -3 mm



SYNTHÈSE DE LA CINÉMATIQUE DES TÊTES DES PIEUX



Vecteurs de déplacement dans la direction longitudinale



Vecteurs de déplacement dans la direction transversale

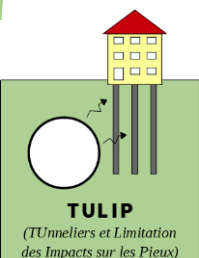
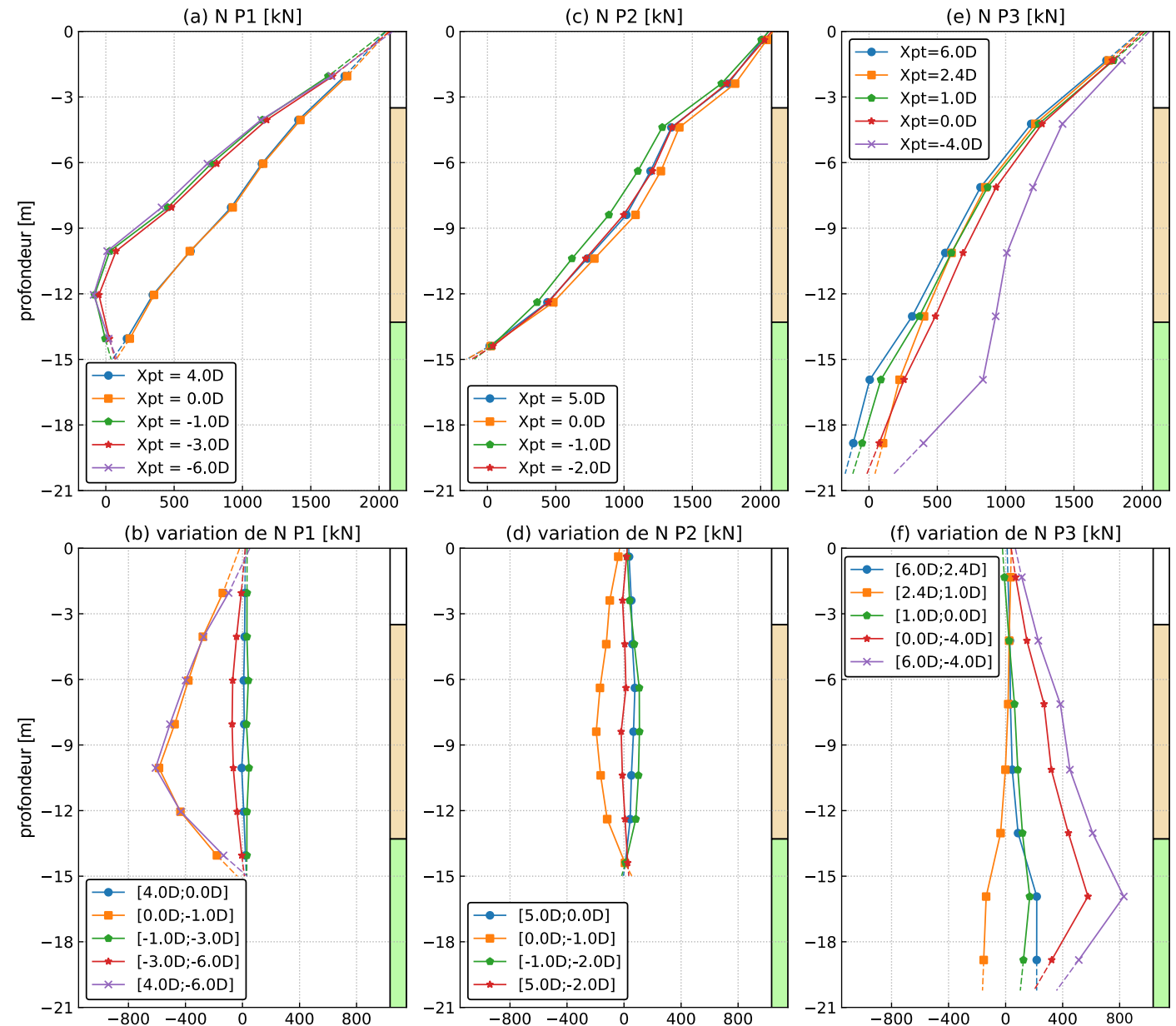
EFFORTS NORMAUX

- Diminution des efforts dans P1
- Faible variation dans P2
- Augmentation des efforts dans P3

Pour la variation de N, la courbe correspond à :

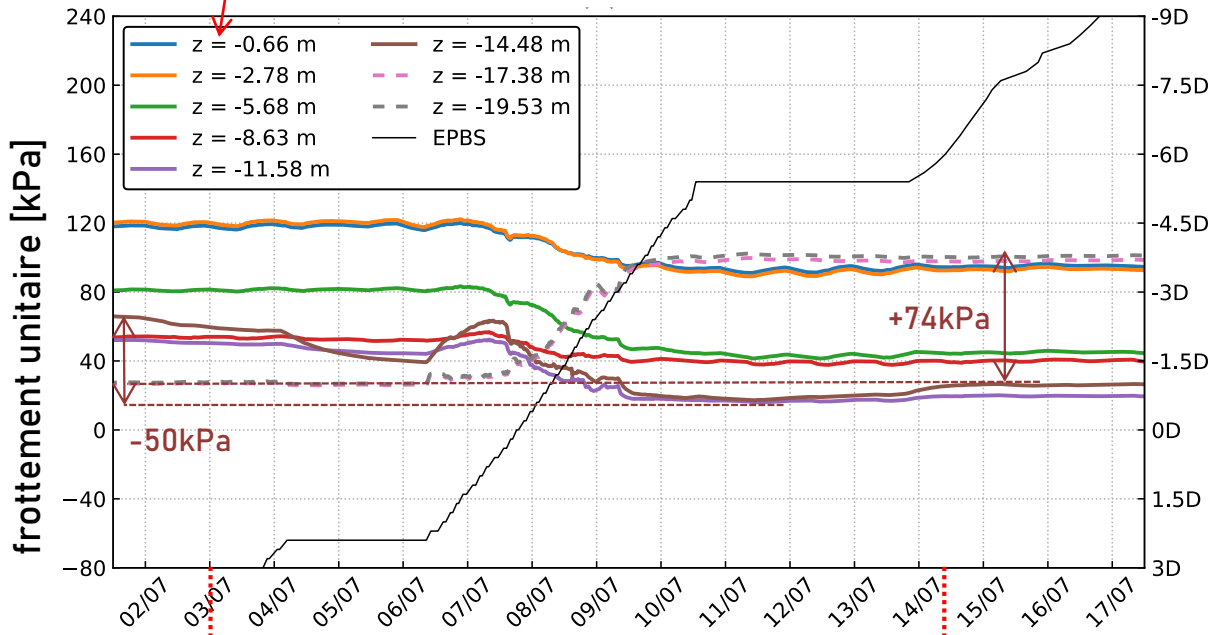
- $N(X_{pt} = b) - N(X_{pt} = a)$

pour l'intervalle $[a, b]$



FROTTEMENTS

mi-profondeur de chaque tronçon

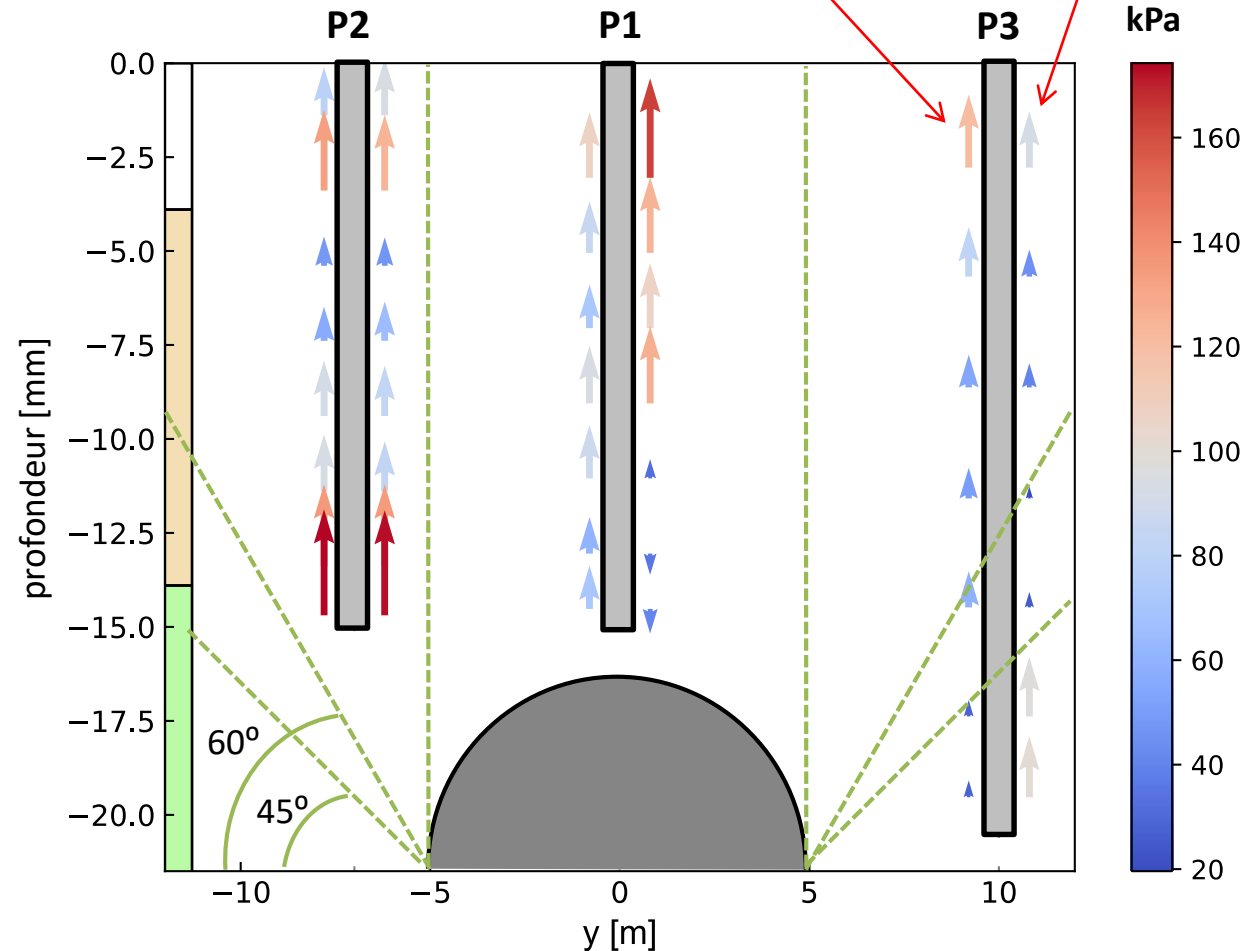


Frottement unitaire dans P3, évolution en fonction du temps et de la position du front du tunnelier

$X_{pt} = 4D$

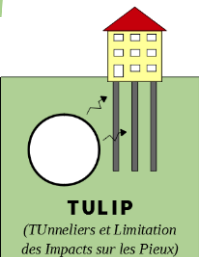
$X_{pt} = -6D$

Frottement avant creusement Frottement après creusement



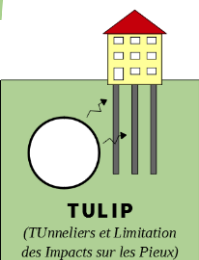
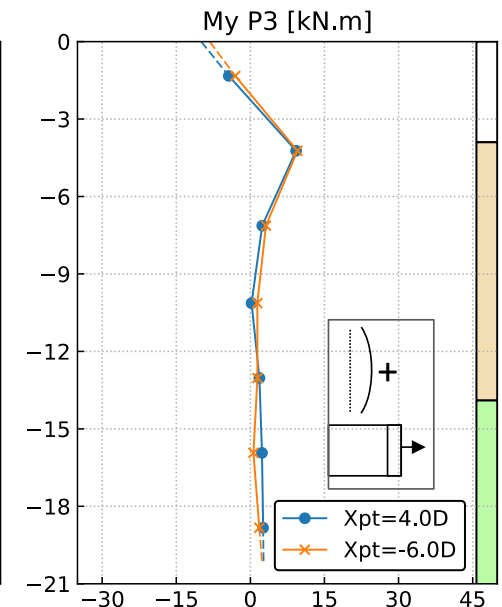
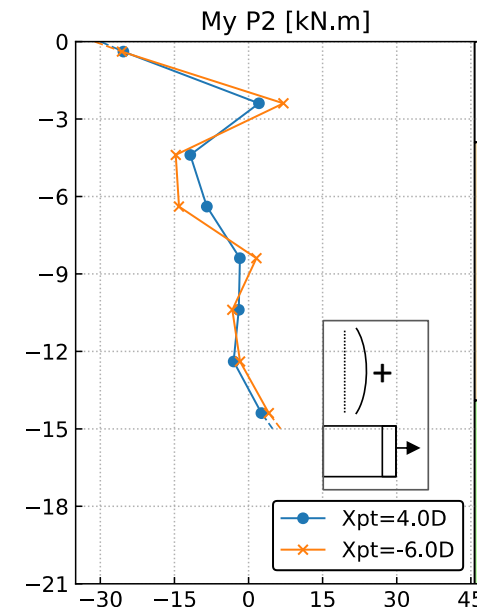
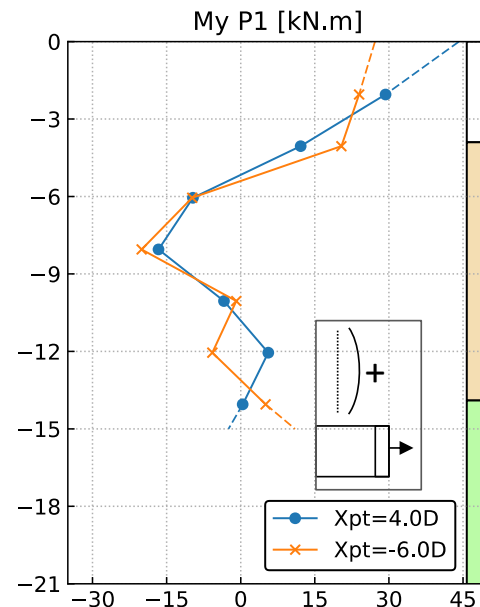
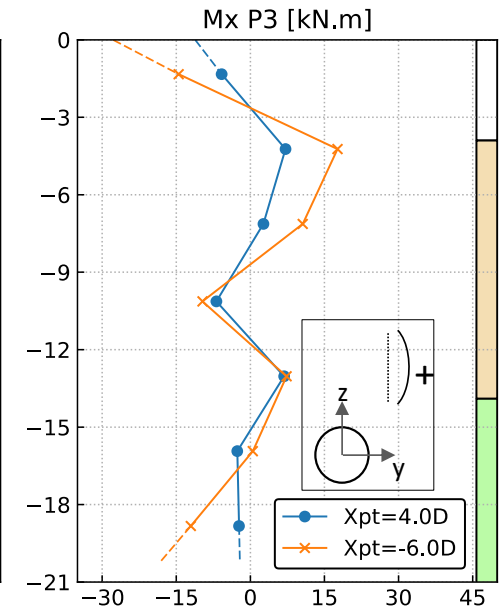
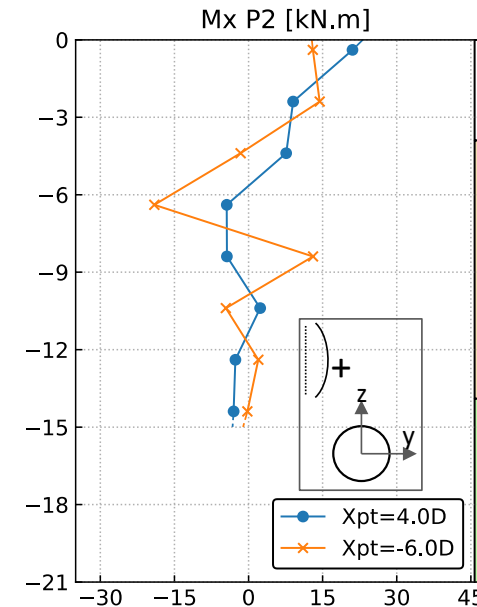
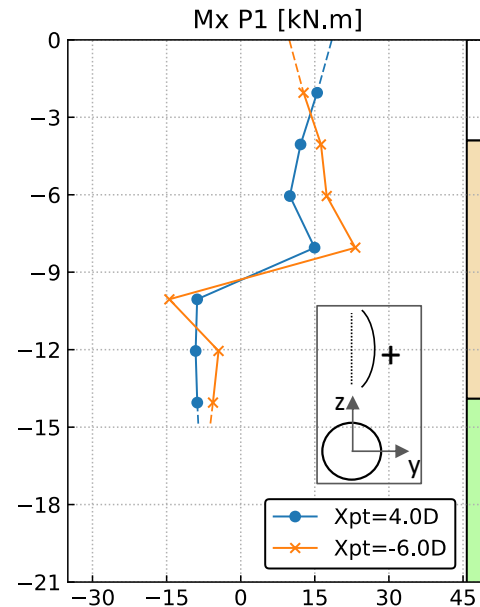
A gauche de pieu, $X_{pt} = 4D$

A droite, $X_{pt} = -6D$



MOMENTS FLÉCHISSANTS

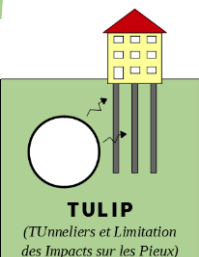
- Moments faibles

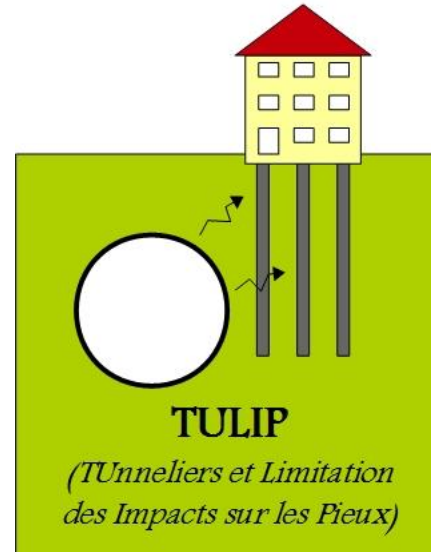


CONCLUSIONS

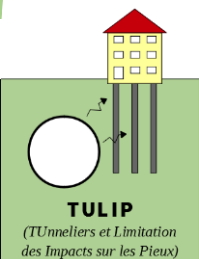
- Grand nombre d'informations concernant les conditions de creusement du tunnelier
- Champs de déplacements complets en surface et en profondeur dans les 3 directions
- Contexte particulier du Bassin Parisien
- Cohérence entre la réponse des pieux et la réponse du sol
- Bon accord avec les études issues de la littérature

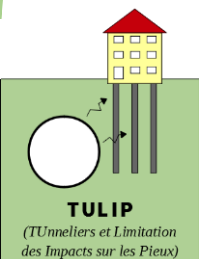
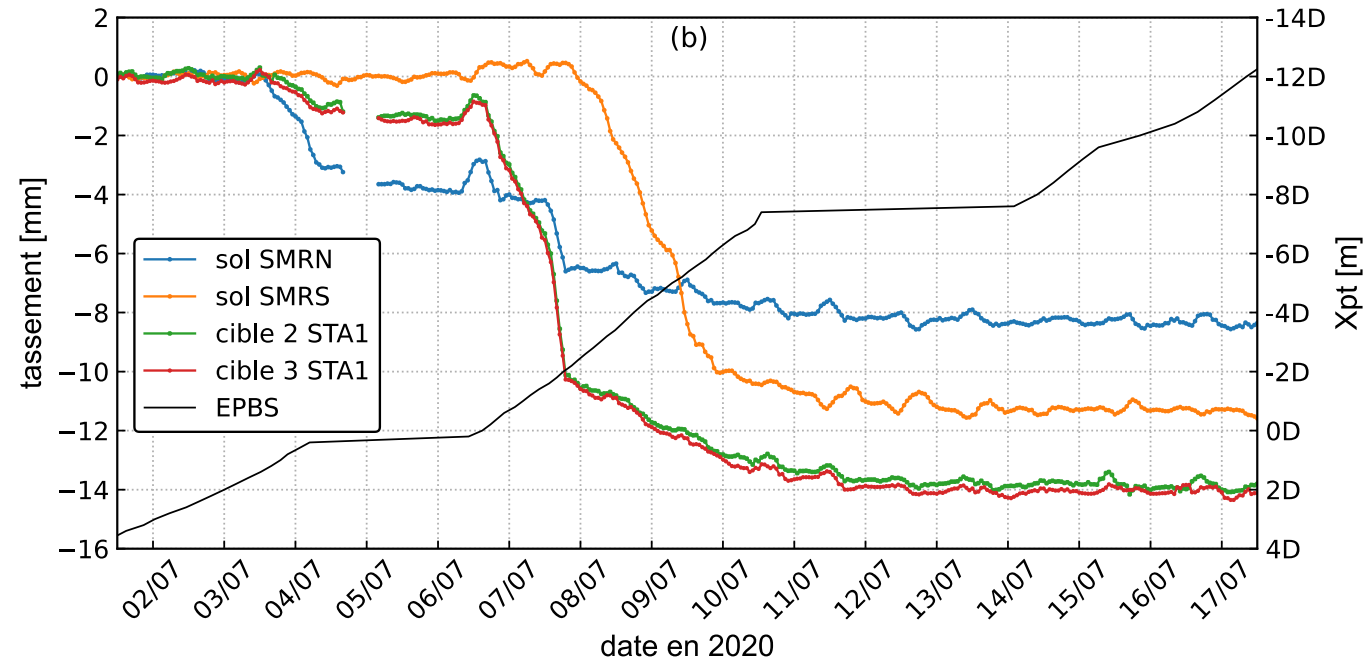
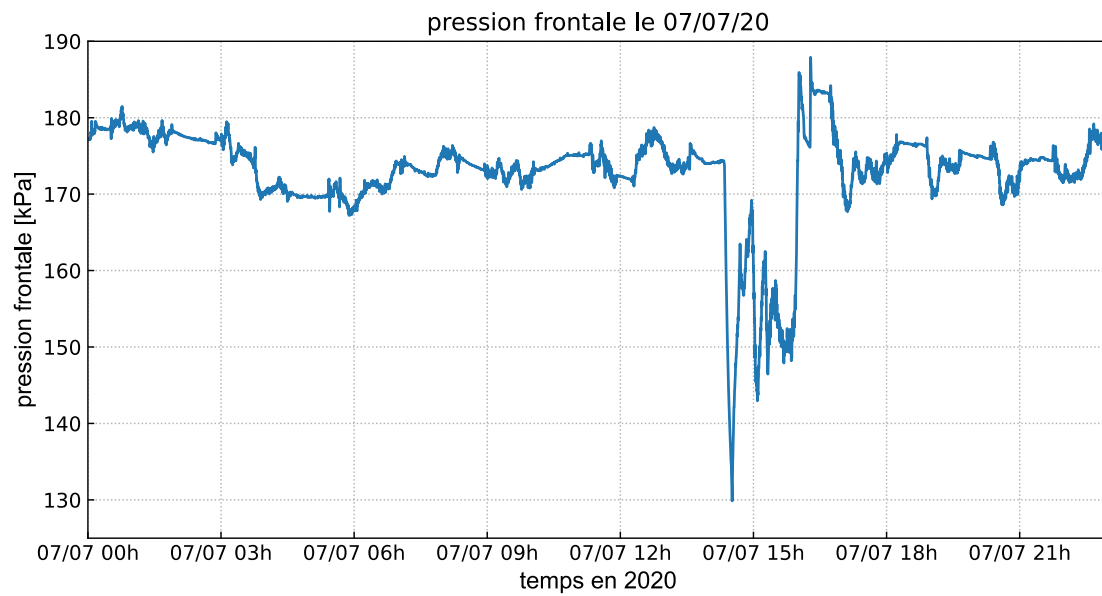
- Importance d'être présent pendant le creusement pour l'interprétation des données
- Travail de croisement en cours entre les efforts dans les pieux et les déplacements du sol
- Résultats formant une base solide pour développer des modèles numériques susceptibles de reproduire les mécanismes observés

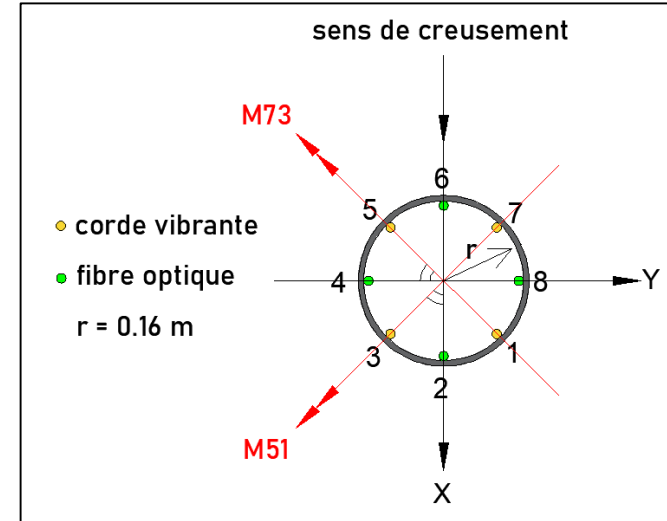
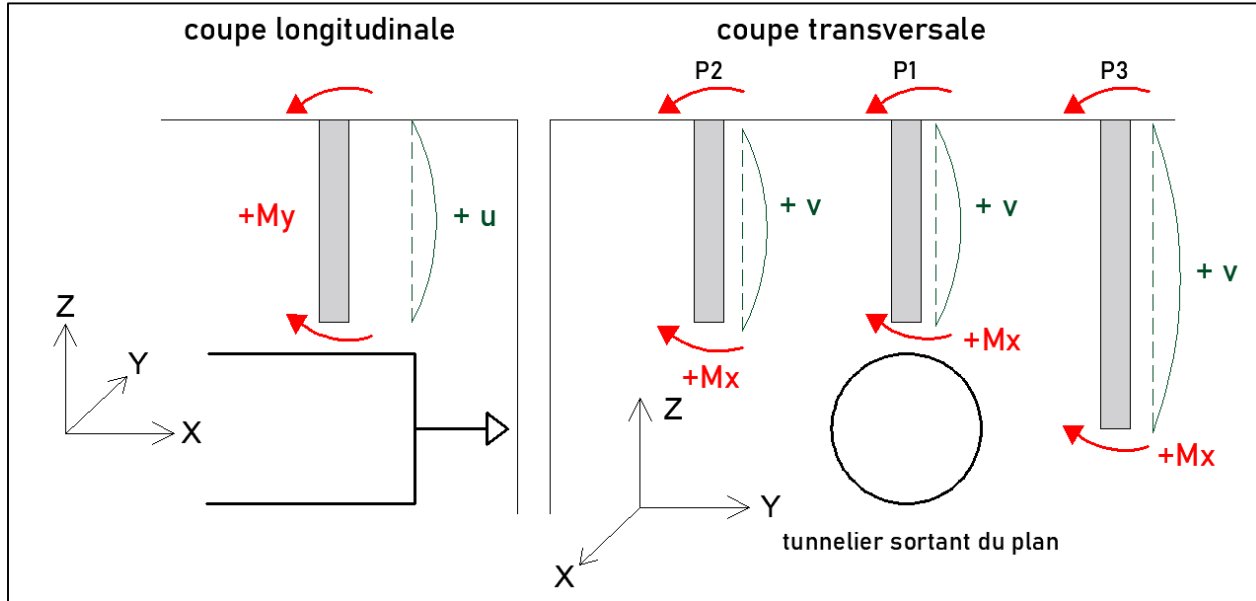




**Merci de votre
attention**







$$N = E_p A_p \varepsilon_{moy}$$

$$M_x = \frac{E_p I_p}{r} \left(\frac{\varepsilon_4 - \varepsilon_8}{2} \right)$$

$$M_y = \frac{E_p I_p}{r} \left(\frac{\varepsilon_6 - \varepsilon_2}{2} \right)$$

$$M_{51} = \frac{E_p I_p}{r} \left(\frac{\varepsilon_5 - \varepsilon_1}{2} \right)$$

$$M_{73} = \frac{E_p I_p}{r} \left(\frac{\varepsilon_7 - \varepsilon_3}{2} \right)$$

$$M_x = M_{51} \cos(\beta) - M_{73} \sin(\beta)$$

$$M_y = M_{51} \sin(\beta) + M_{73} \cos(\beta)$$

$$M_x = \frac{\sqrt{2}}{2} (M_{51} - M_{73})$$

$$M_y = \frac{\sqrt{2}}{2} (M_{51} + M_{73})$$

