Qualité des calculs par éléments finis

16 mars 2011

Philippe Mestat (Ifsttar)

- Qu’est-ce qu’un bon modèle de calcul ?
- Qu’est-ce qu’un modèle correct ?
  - Qualité des données
  - Qualité du logiciel
  - Cohérence des résultats
- Que peut-on vérifier ?
  - Convergences
  - Conditions aux limites
  - Ordres de grandeur

Entrées : Maillage (éléments, dimensions, densité)

Conditions limites

Conditions initiales

Chargements

Sorties : Processus itératif (convergence)

Équilibre du milieu global

Champ de déplacements

Champ de contraintes

Champ de déformations plastiques

Traitement des lois de comportement

Convergences

$u^{EF}_{h,n,i}$

Solution approchée à maillage, incréments et itération donnés

$u^{EF}_{h,n}$

Solution approchée à maillage et incréments donnés

u^{EF}_{n}

Solution exacte du problème éléments finis (incrément n)

u^{Th}_{n}

Solution exacte du problème théorique

Comparaison

u^{Exp}_{n}

Valeur réelle (mesure)

Convergence des maillages

L’importance de la convergence au sens du maillage semble un peu perdue de vue aujourd’hui.

. En 2D, les maillages sont généralement acceptables, même lorsqu’il y a beaucoup de matériaux et d’interfaces

. En 3D, les maillages sont souvent insuffisants, par rapport à des coupes 2D :

- problème de taille des modèles 3D ;
- compromis difficile à trouver ;
- estimateurs d’erreur a posteriori.

Vérification : maillage

- Indicateurs sur la densité suffisante du maillage :
  - variation « lisse » des contraintes dans les zones les plus sollicitées ;
  - isovaleurs des déformations plastiques ;
  - voisinage des singularités ;
  - « sauts de contraintes » aux nœuds ;
  - estimateurs d'erreurs a posteriori ;
  - vérification d'équilibre (en moyenne) ;
  - calcul des contraintes initiales ;
  - calcul des contraintes normales (bord libre).

Vérification : processus itératif

- Les tests de convergence sont vérifiés en moyenne, ce sont des tests globaux sur l'ensemble des degrés de liberté.

- Ce sont généralement des conditions nécessaires, mais non suffisantes : sauf pour l'analyse du taux de convergence.

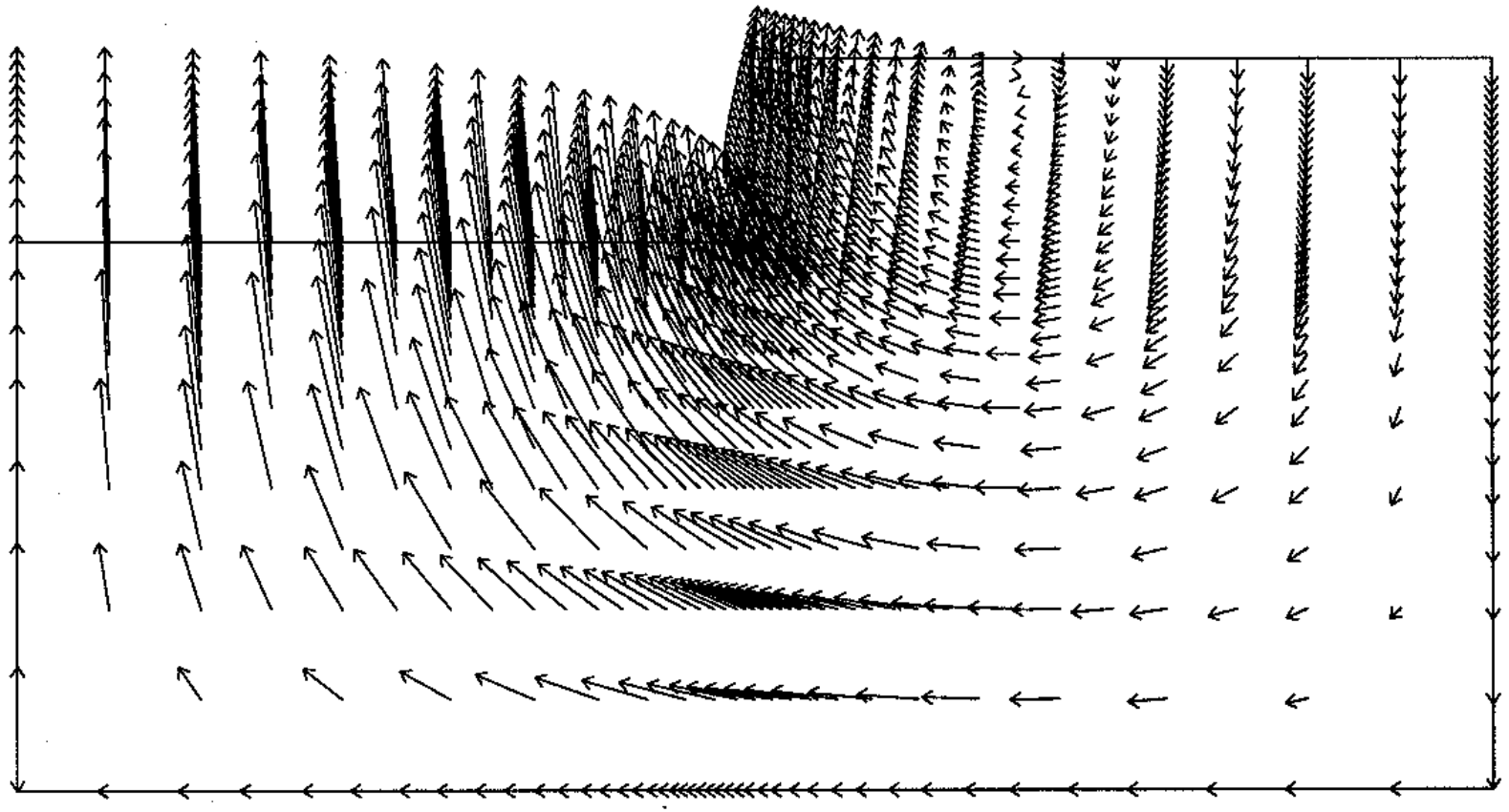
- Indicateurs sur le déroulement des calculs :
  - contrôle du processus itératif (tests de convergence) ;
  - le rapport sur les résidus doit décroître et tendre vers zéro ;
  - le taux de convergence doit décroître, de manière monotone et tendre vers une limite strictement inférieur à l'unité.

Vérification : déplacements

- Analyse de l'accroissement du champ de déplacements entre deux étapes de calcul.

- Analyse visuelle de la déformée globale :
  - continuité par construction (K U = F) ;
  - respect des conditions aux limites ;
  - déplacements nuls à « l'infini » ;
  - signe des forces appliquées (une compression entraîne un tassement et une traction, un soulèvement ; un cisaillement peut entraîner un glissement) ;
  - cohérence globale de la cinématique visualisée.

Calcul correct et modèle irréaliste



Mauvaise cinématique due à une réponse élastique linéaire

Vérification : contraintes

- **Étude du champ de contraintes :**
  - problèmes des contraintes calculées aux points d'intégration et estimation aux nœuds ;
  - loin des ouvrages et des sollicitations, les contraintes sont égales aux contraintes initiales ;
  - aux points d'application des forces, les équilibres locaux sont à vérifier, comme la continuité des vecteurs-contraintes ;
  - intégration des contraintes normales, comparaison avec le poids des matériaux ou des structures ;
  - localisation des valeurs maximales ;
  - cohérence des compressions ou des tractions avec les sollicitations appliquées, et la cinématique observée ;
  - concentration des contraintes aux singularités.

- Contrainte normale : $\sigma_n = (\sigma_{ij}\, n_j)\, n_i$ et contrainte tangentielle : $\tau = (\sigma_{ij}\, n_j)\, t_i$)

Exploitation des contraintes

. Ne pas oublier que, même en déformation plane, le champ de contraintes est tridimensionnel : la contrainte σ_{zz} perpendiculaire au plan joue un rôle non négligeable

. En déformation plane, le critère de plasticité reste « tridimensionnel »

. Les contraintes sont calculées aux points d'intégration et exploitées aux nœuds :

- l'interpolation « inverse » peut être source d'erreur si le maillage n'est pas suffisamment fin.

Question à se poser :

. Comment se termine le processus itératif ? Sur un état d'équilibre ou un état satisfaisant la loi de comportement ?

Vérification : lois de comportement

- Les calculs en comportement non linéaire sont effectués aux points d'intégration internes aux éléments finis :
  - schéma d'intégration locale ;
  - pas et « bornes » d'intégration – liens avec la discrétisation des chargements appliqués.

- Cas de l'élastoplasticité :
  - calcul du critère de plasticité (isovaleurs) ;
  - variables d'écrouissage (isovaleurs) ;
  - localisation des déformations plastiques ;
  - comparaison des déformations totales calculées comme gradient des déplacements et comme « somme » des déformations élastiques et plastiques.

Continuité de certaines variables

. Continuité des déplacements et des pressions interstitielles

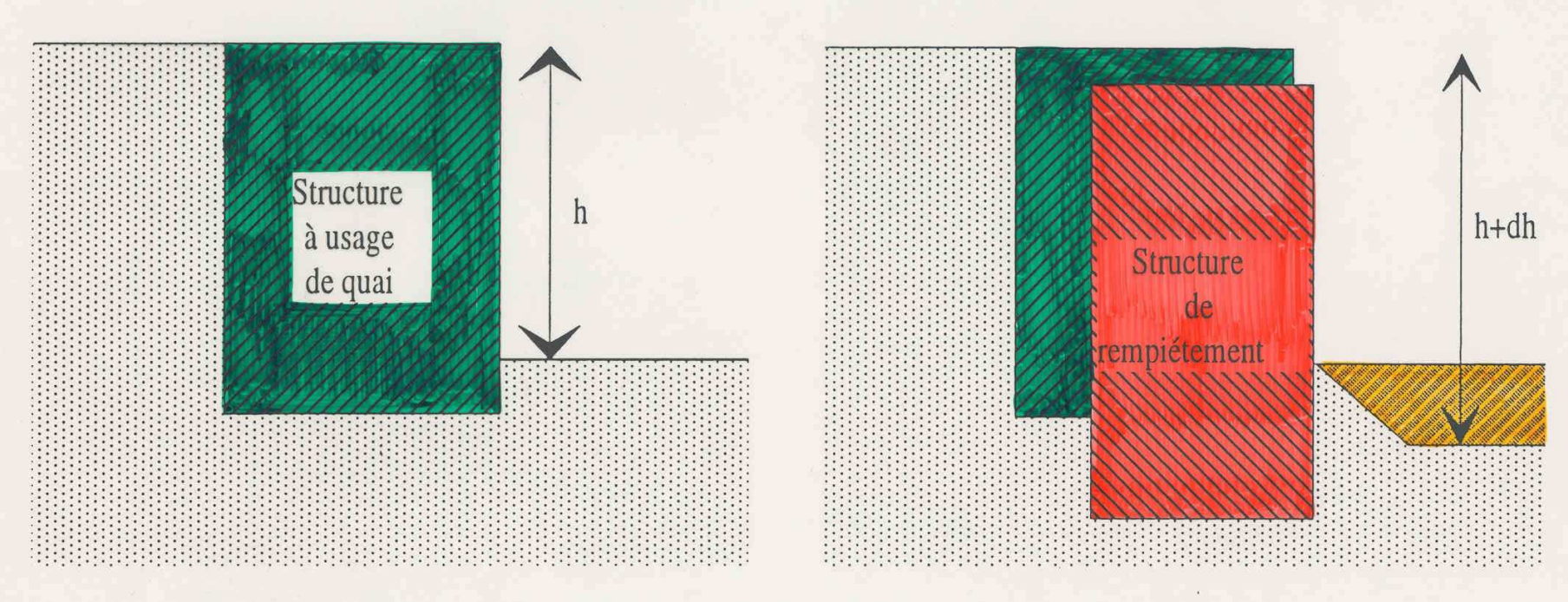
. Continuité du vecteur-contrainte :

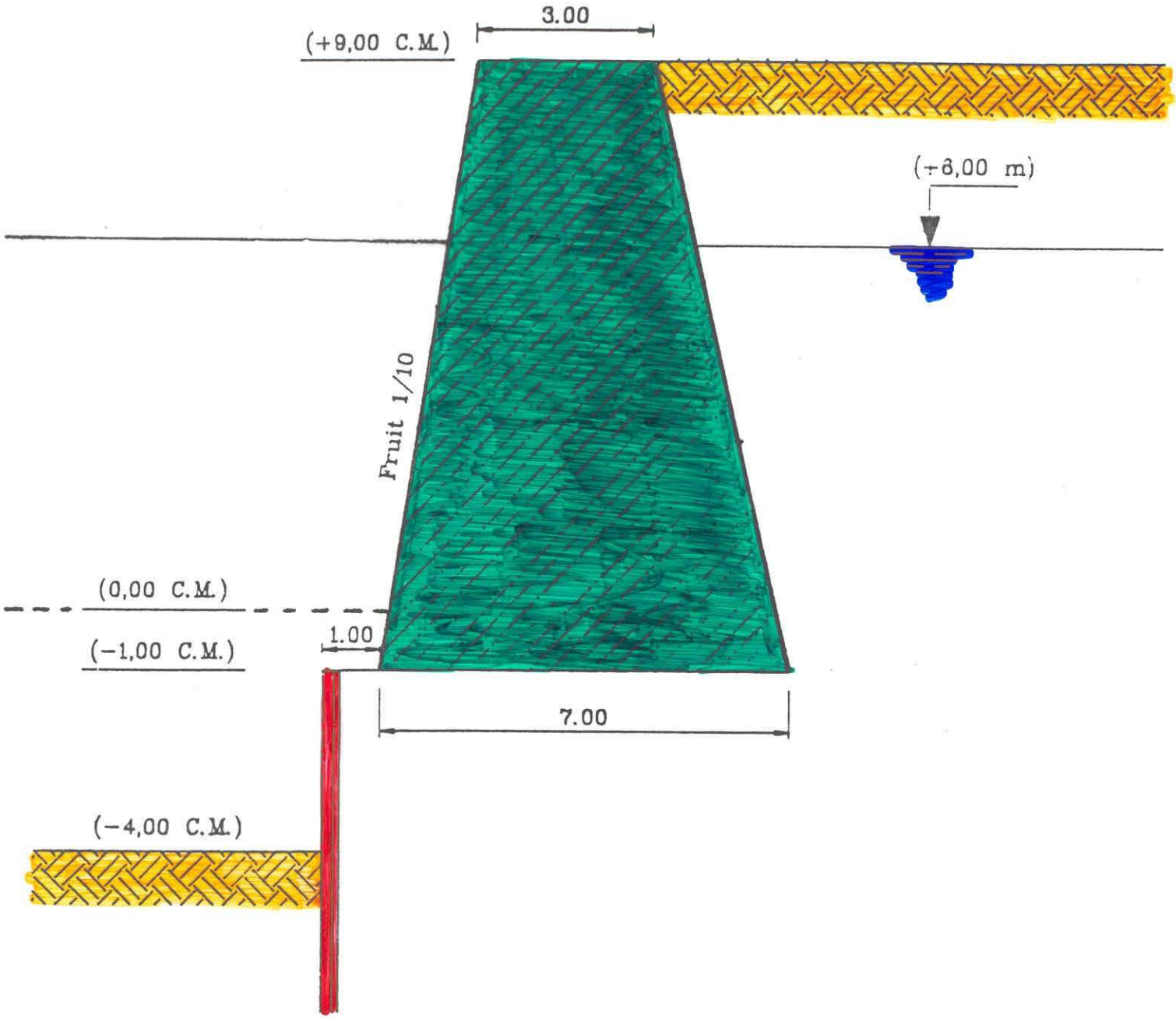
- composante normale : $\sigma_n = (\sigma_{ij}\, n_j)\, n_i$
- composante tangentielle : $\tau = (\sigma_{ij}\, n_j)\, t_i$

. Analyse des frontières du maillage :

- frontières externes (bords libres) ;
- frontières internes (« interfaces », « bords libres »).

Exemple de la modélisation d'un rempiétement de quai




3.00
(+9,00 C.M.)
(+6,00 m)
Fruit 1/10
(0,00 C.M.)
(−1,00 C.M.)
1.00
7.00
(−4,00 C.M.)

Hypothèses de modélisation

. Petites déformations

. Déformation plane

. Niveau de la nappe identique de part et d'autre de l'ouvrage

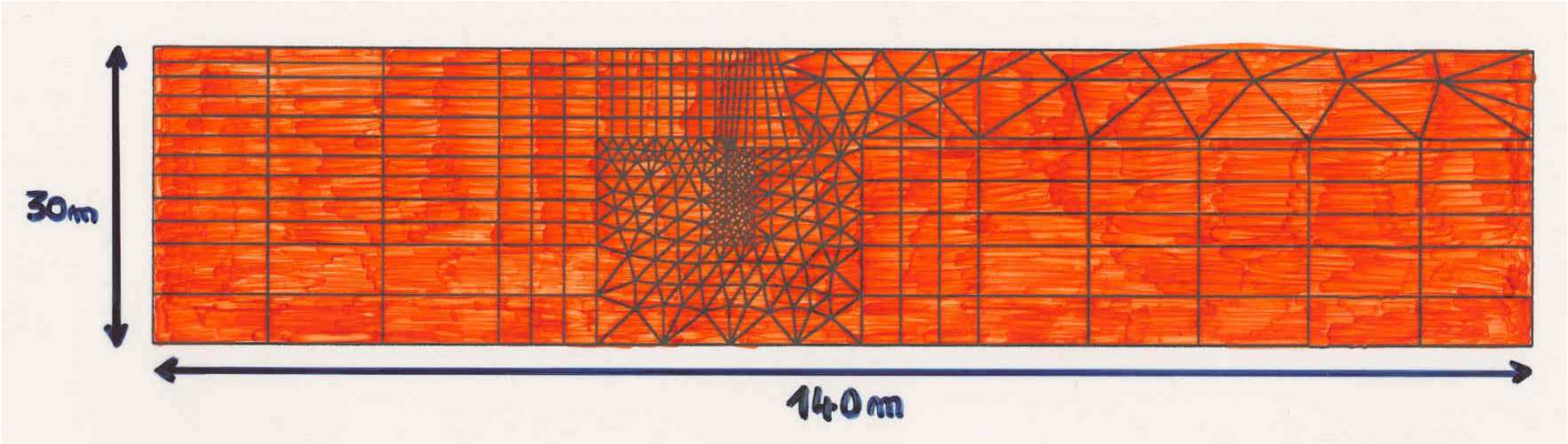
. Action de la nappe prise en compte en « déjaugeant »

. Comportement du sol : élastoplasticité parfaite (Mohr-Coulomb)

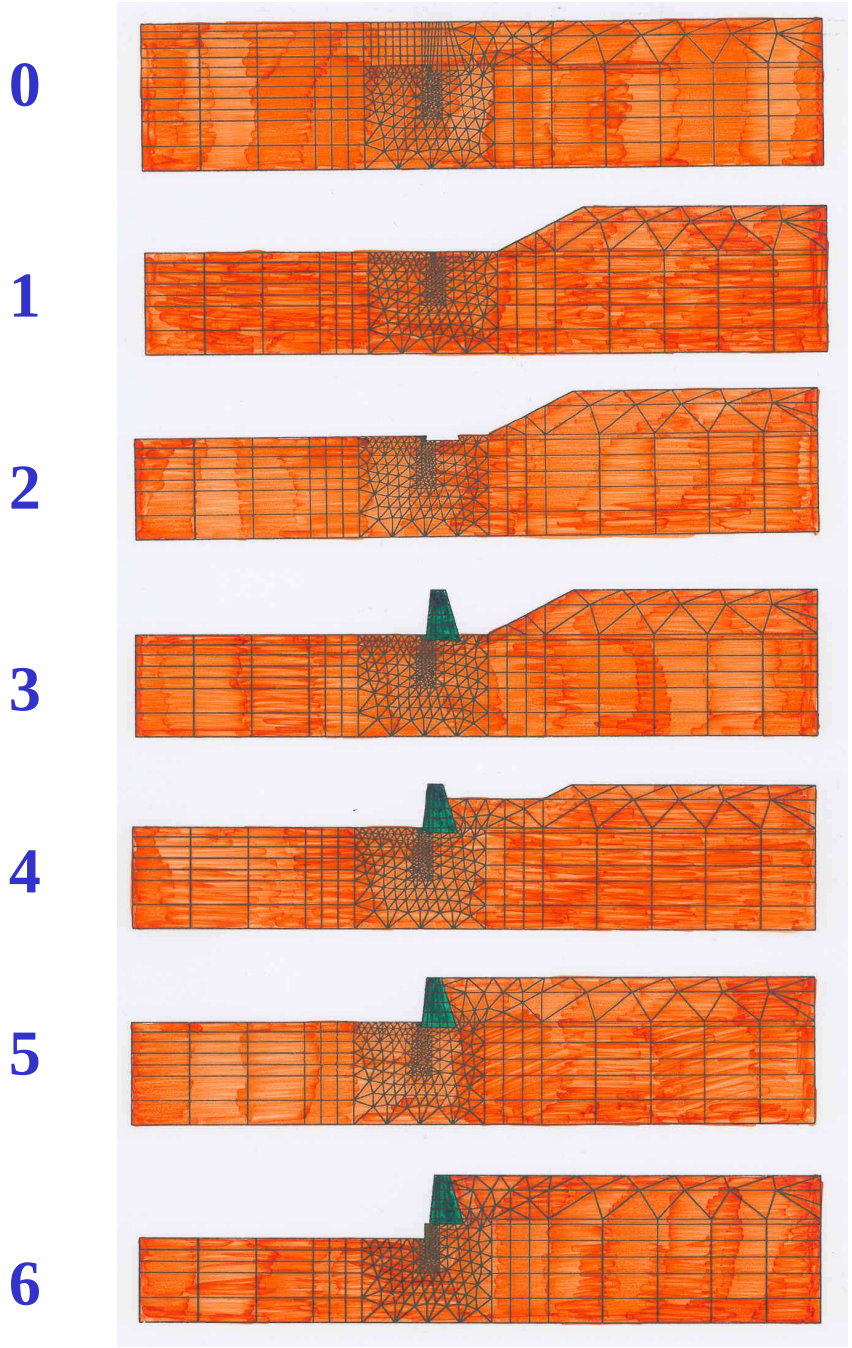
. Comportement des autres matériaux : élasticité linéaire

. Interface entre les matériaux : prise en compte ou non

Maillage par éléments finis



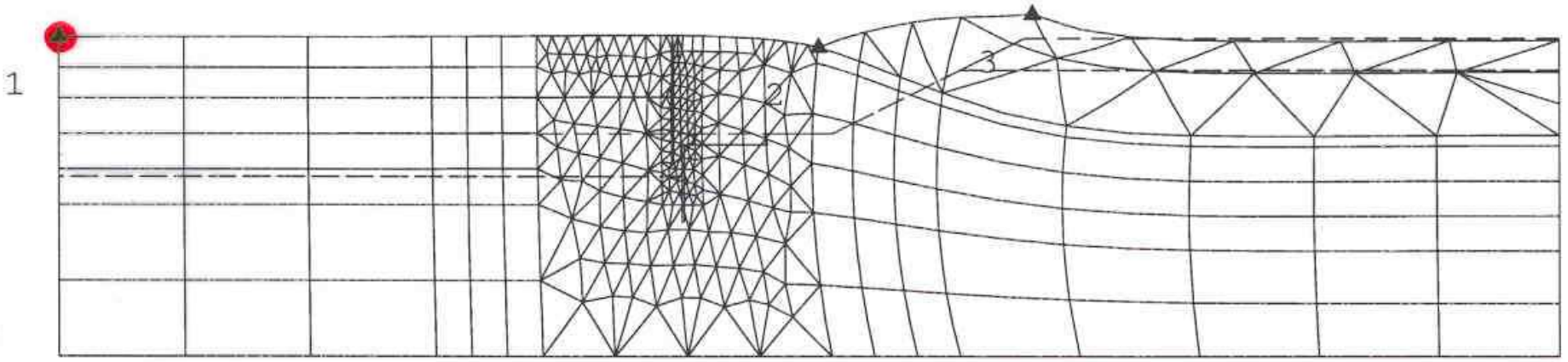
1693 nœuds et 698 éléments, dont 44 éléments d'interface



Histoire reconstituée et simplifiée de la construction et de la vie de l'ouvrage en cinq étapes

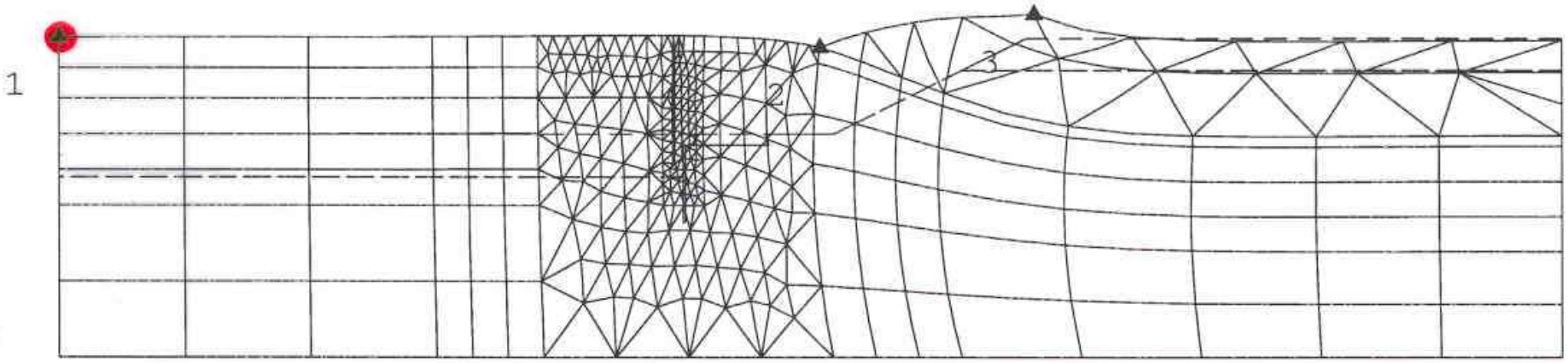
Étape 6 : rempiétement

Étape 1 : modélisation du rempiétement



Étape 1 : modélisation du rempiétement

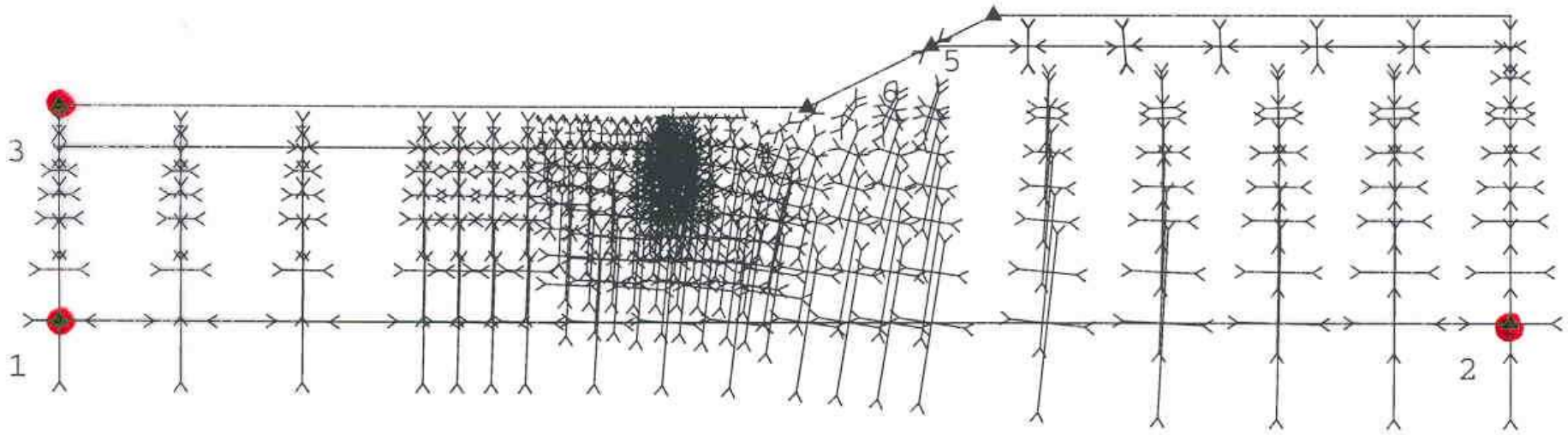
$$w = \frac{(1+\nu')(1-2\nu')}{E'(1-\nu')}\left[\gamma D_1 + (\gamma - \gamma_w) D_2\right] H$$



w = 2,080 cm (formule 1D)

w = 2,086 cm

Étape 1 : modélisation du rempiétement



σ_{xx} = 90,27 kPa

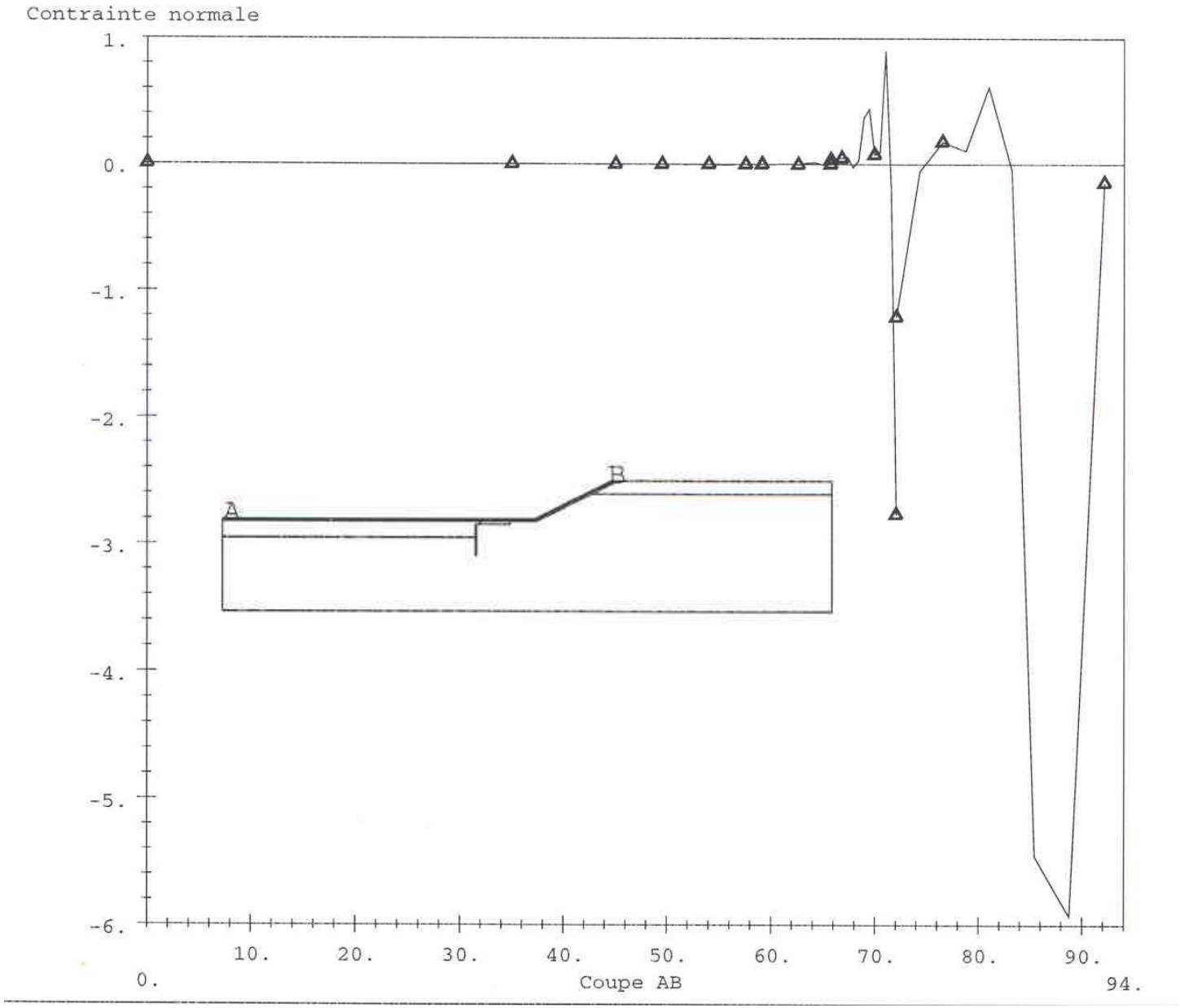
σ_{yy} = 210,61 kPa

σ_{xx} = 141,05 kPa

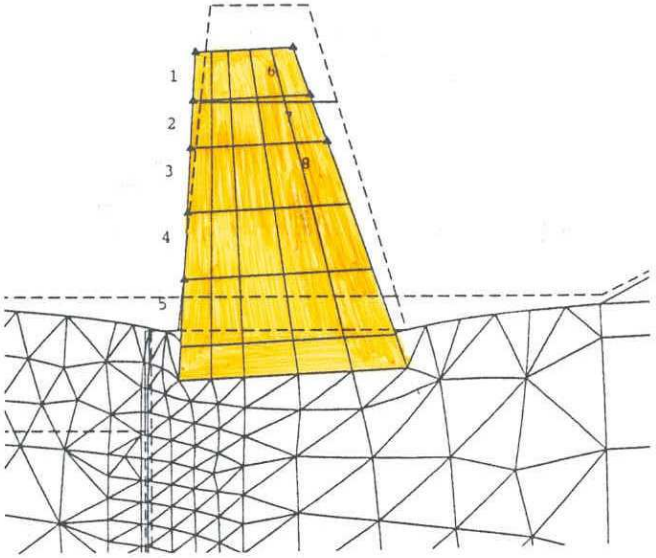
σ_{yy} = 329,19 kPa

Étape 1 : modélisation du rempiétement

σ_n



Étape 3 : modélisation du rempiétement

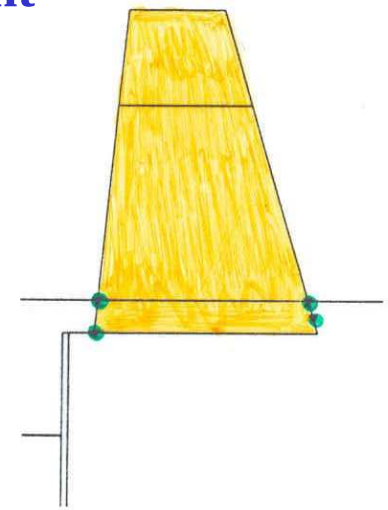


maillage initial ——— maillage deforme ———

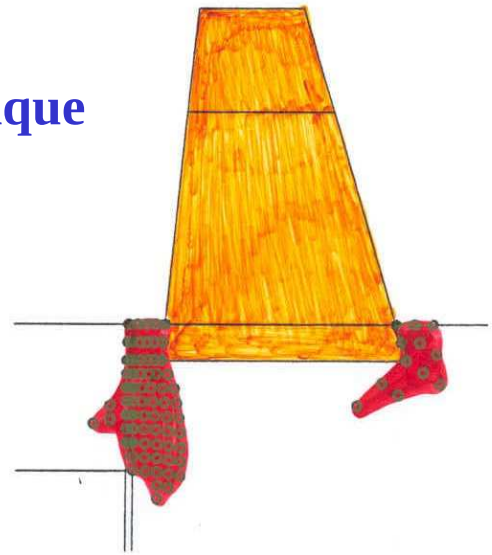
echelle .05

Point	ΔU (m)	Δv (m)
1	-.00493892	-.0152594
2	-.00415733	-.0153362
3	-.0033757	-.0154102
4	-.00233371	-.0155047
5	-.00129155	-.0155922
6	-.00493949	-.0136948
7	-.0041564	-.0134584
8	-.00337347	-.0132201

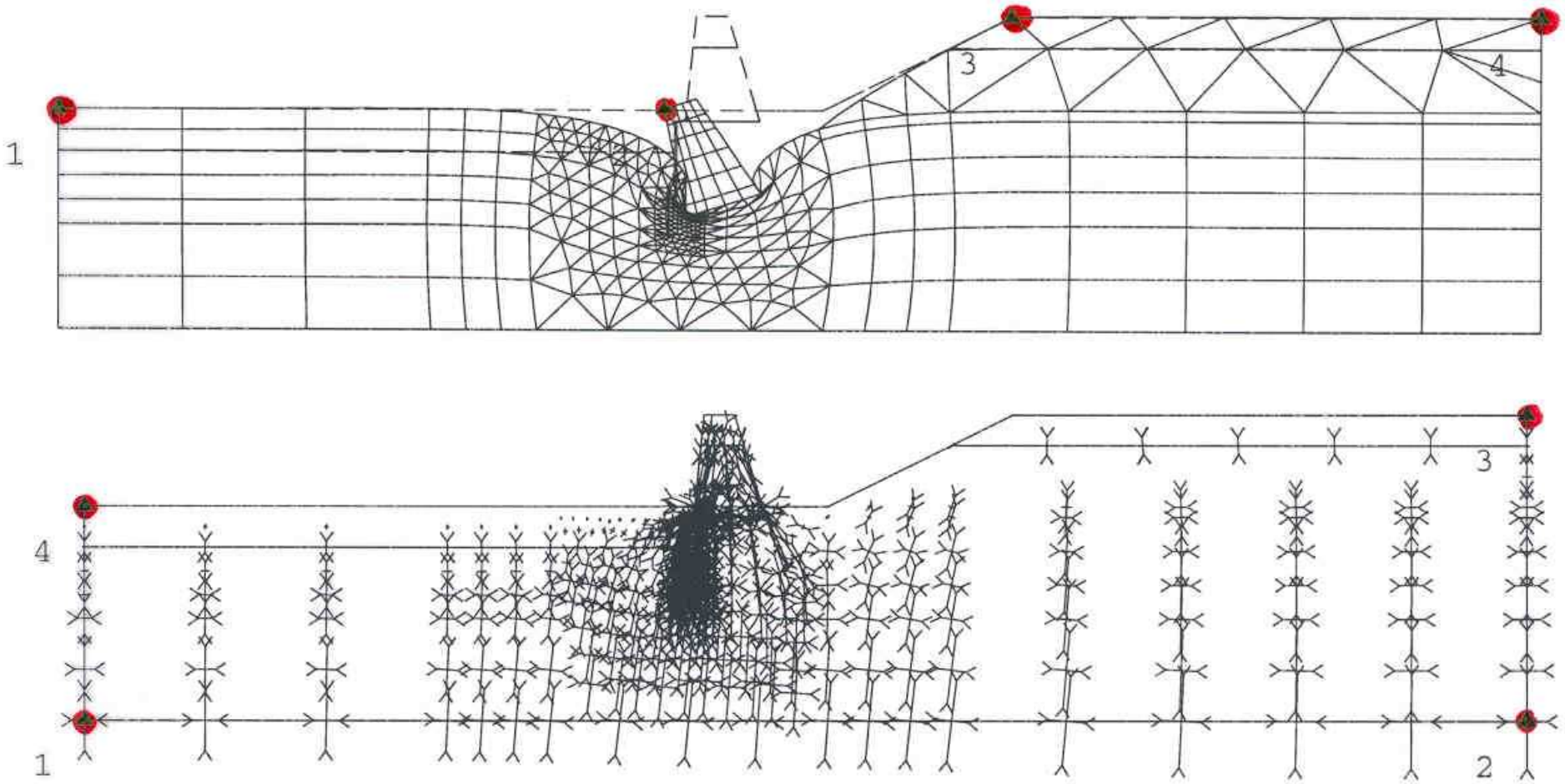
Glissement



Zone plastique



Étape 3 : modélisation du rempiétement



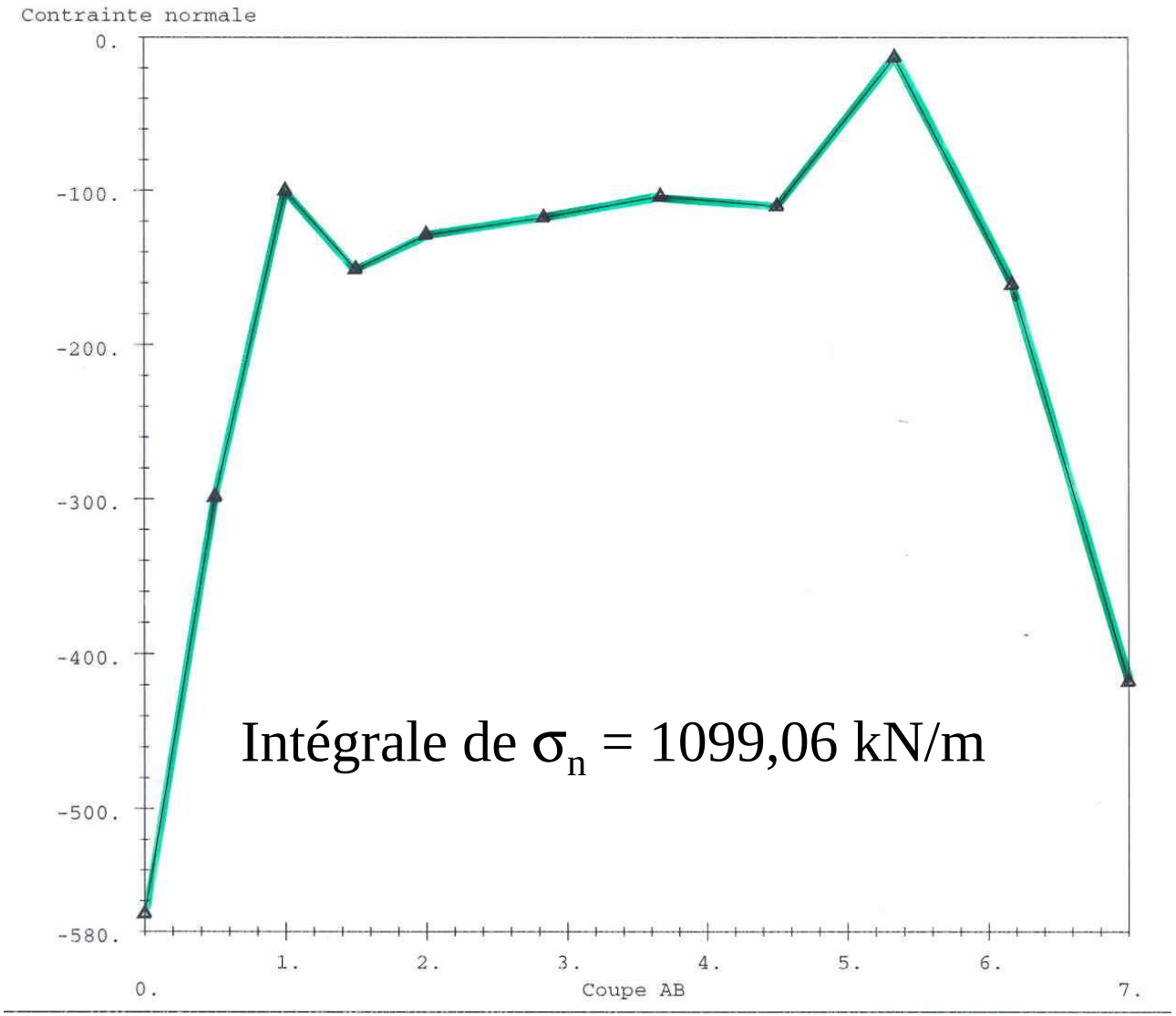
σ_{xx} = 90,42 kPa

σ_{yy} = 210,96 kPa

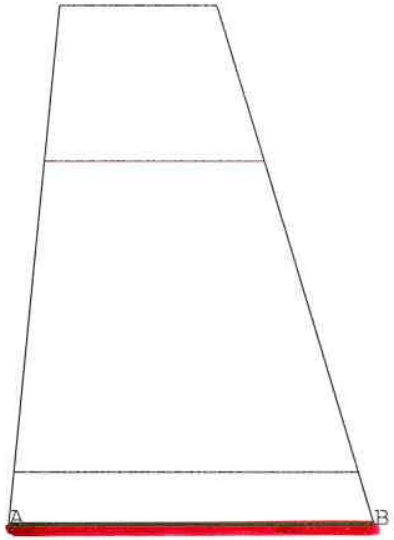
σ_{xx} = 141,07 kPa

σ_{yy} = 329,24 kPa

Étape 3 : modélisation du rempiétement



Intégrale de σ_n = 1099,06 kN/m

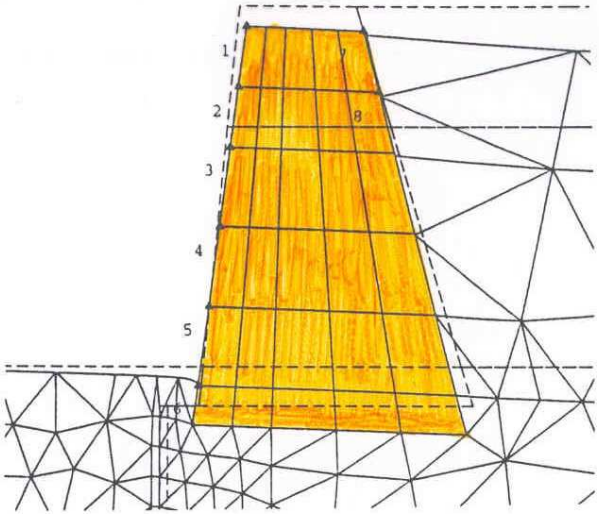


Coupe AB

Poids du mur = 1080 kN/m

Erreur relative = 1,7%

Étape 5 : modélisation du rempiétement

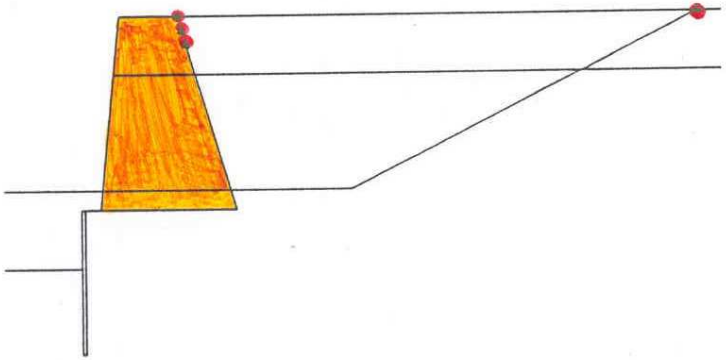


maillage initial – – – maillage deforme ——

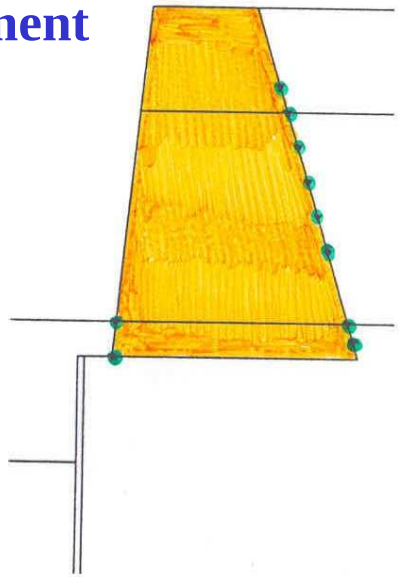
echelle .05

Point	ΔU (m)	ΔV (m)
1	.00280846	-.00787049
2	.00199378	-.00778923
3	.00117972	-.00770903
4	9.86452E-5	-.00760346
5	-.000975753	-.00749706
6	-.00204369	-.00738839
7	.00280872	-.00949956
8	.0019945	-.00974499

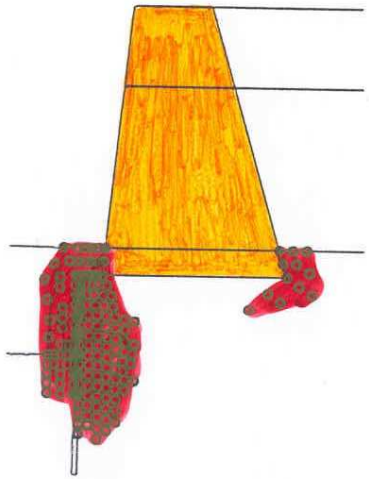
Décollement



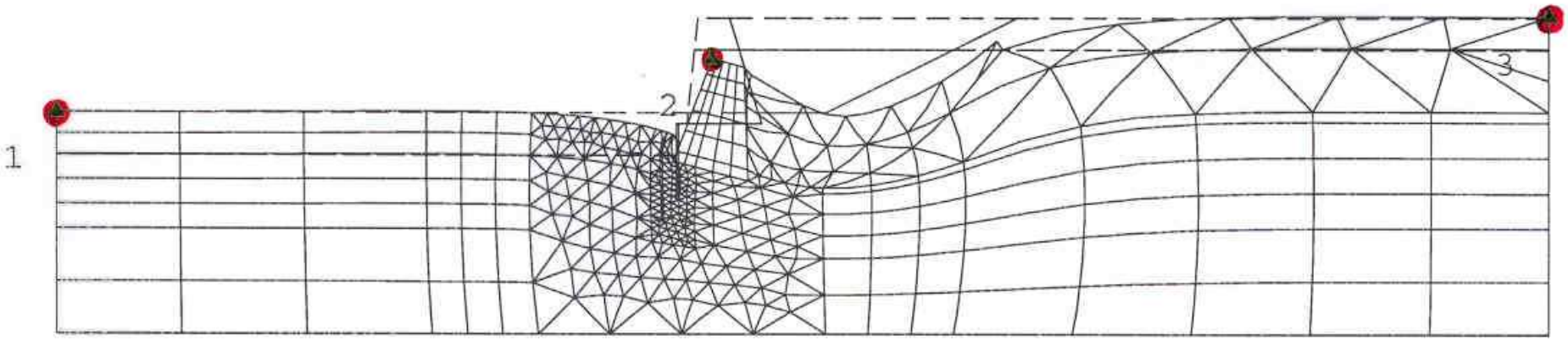
Glissement

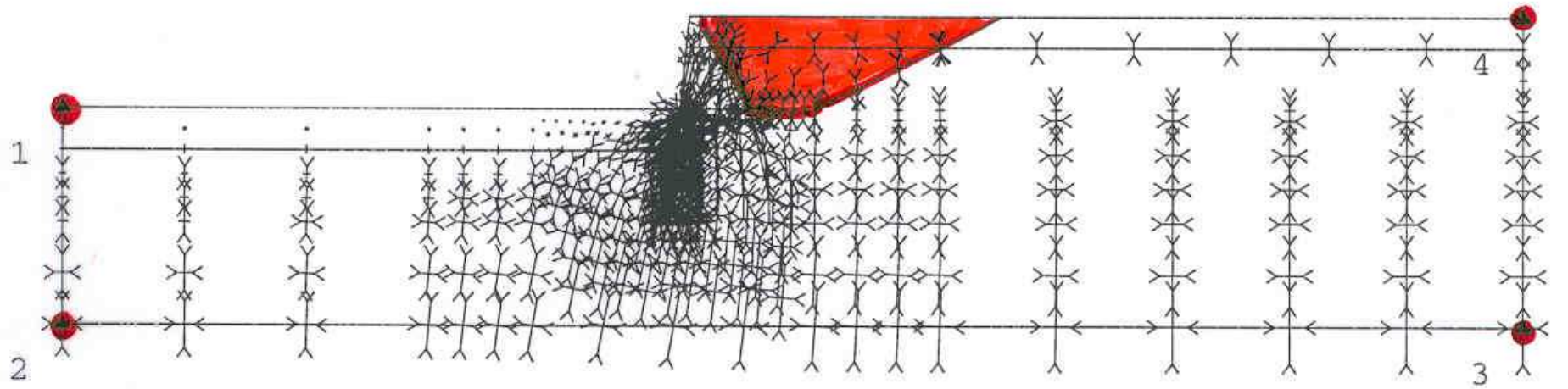


Zone plastique



Étape 5 : modélisation du rempiétement





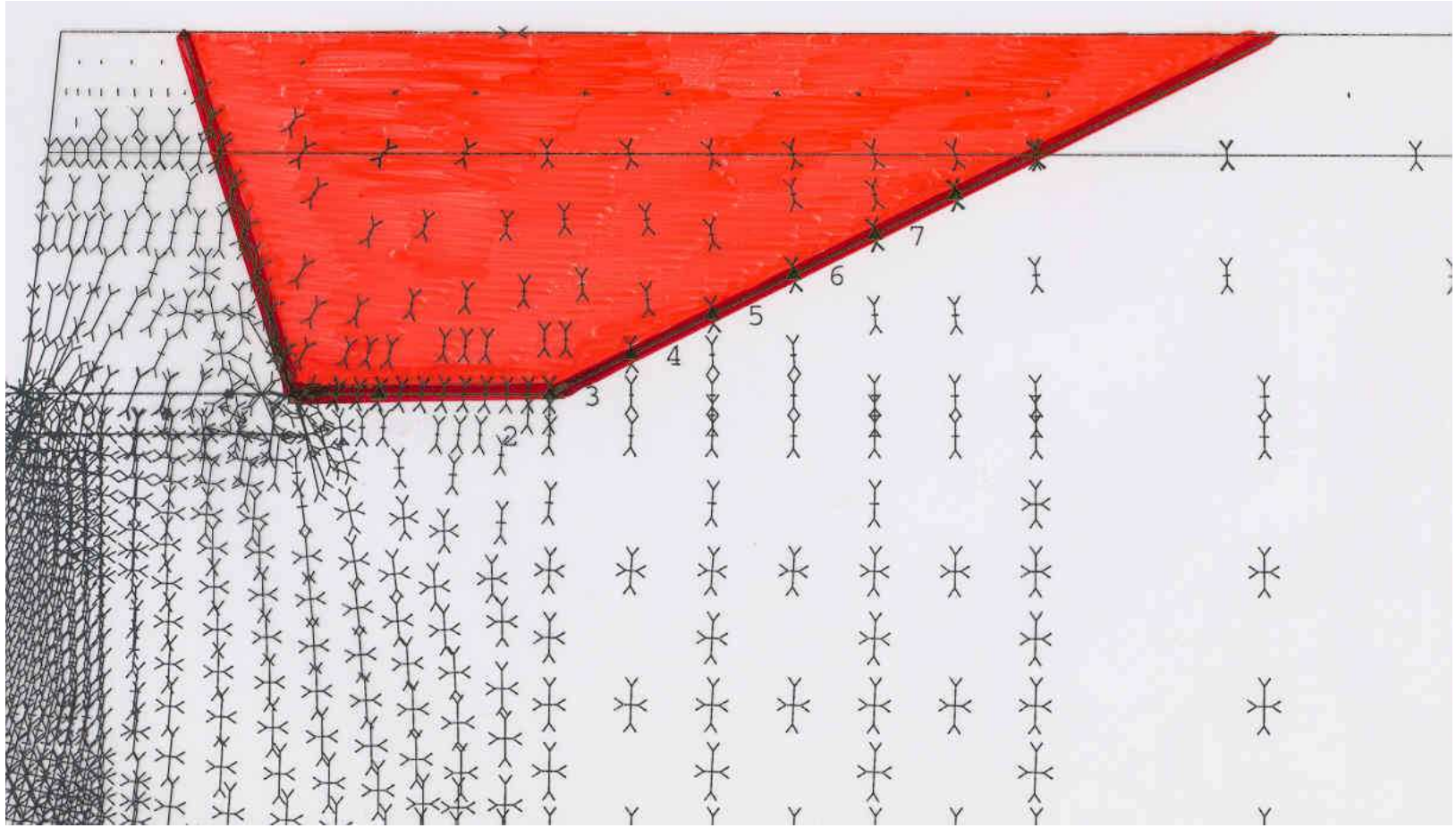
σ_{xx} = 90,78 kPa

σ_{yy} = 211,79 kPa

σ_{xx} = 141,16 kPa

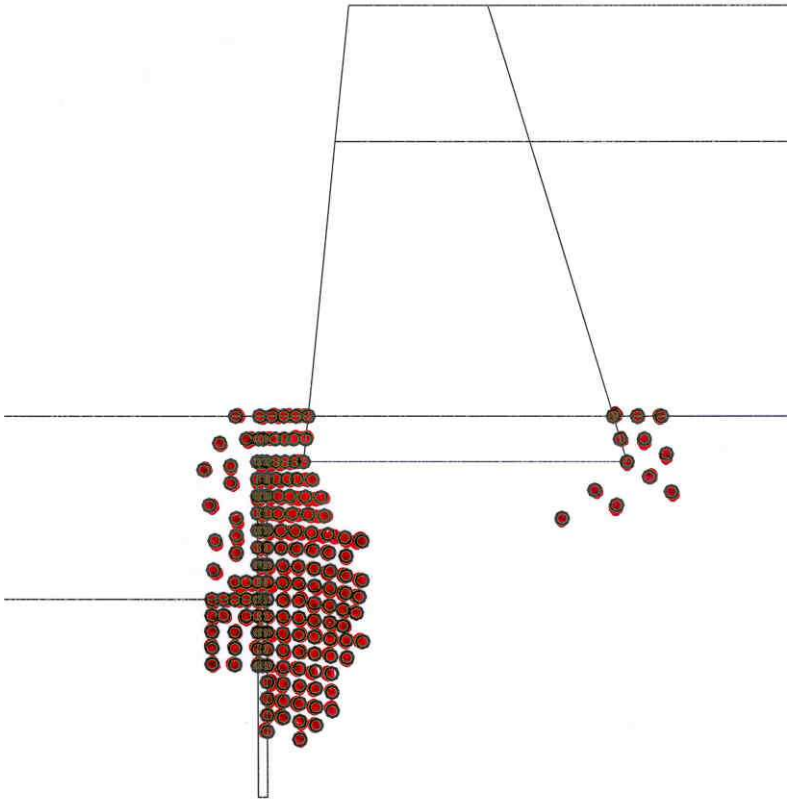
σ_{yy} = 329,38 kPa

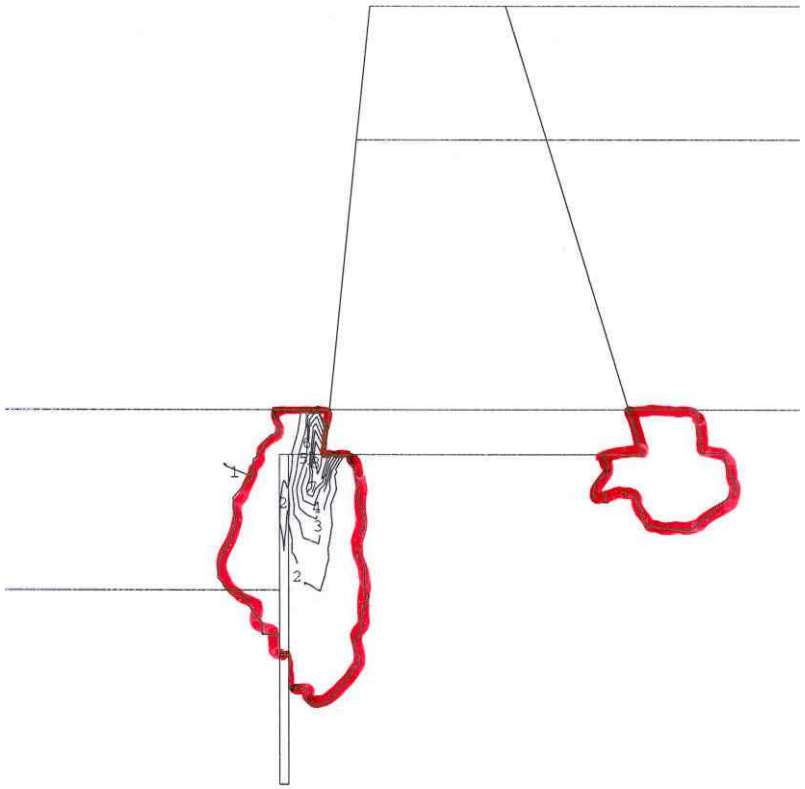
Étape 5 : modélisation du rempiétement



Équilibre du poids du matériau remblayé – Glissement/Décollement

Étape 5 : modélisation du rempiétement

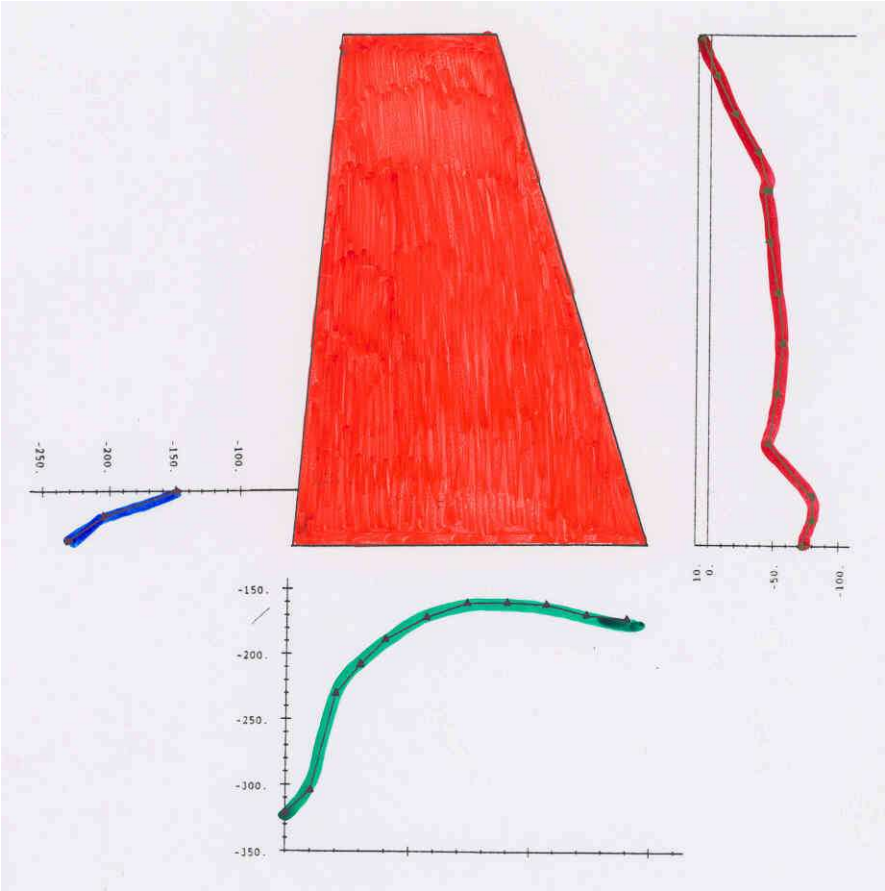


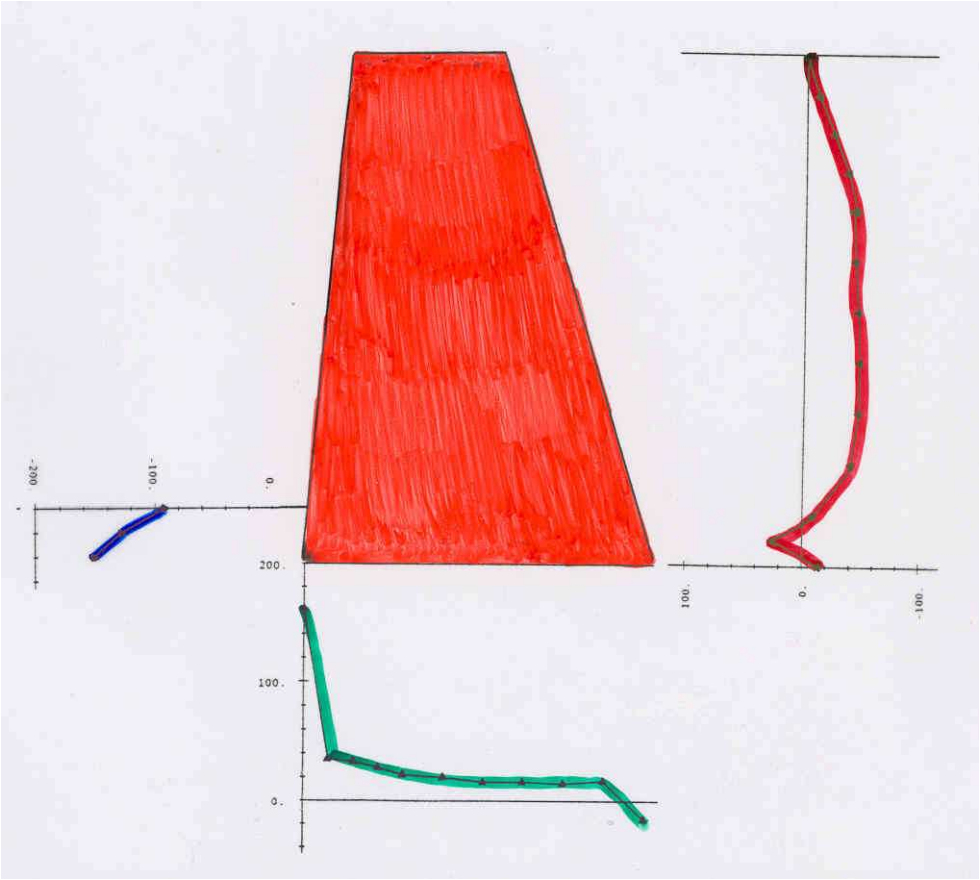


$\varepsilon^{p}_{max} = 0{,}91\ \%$

$\varepsilon^{p}_{moyen} = 0{,}2\ \%$

Étape 5 : modélisation du rempiétement



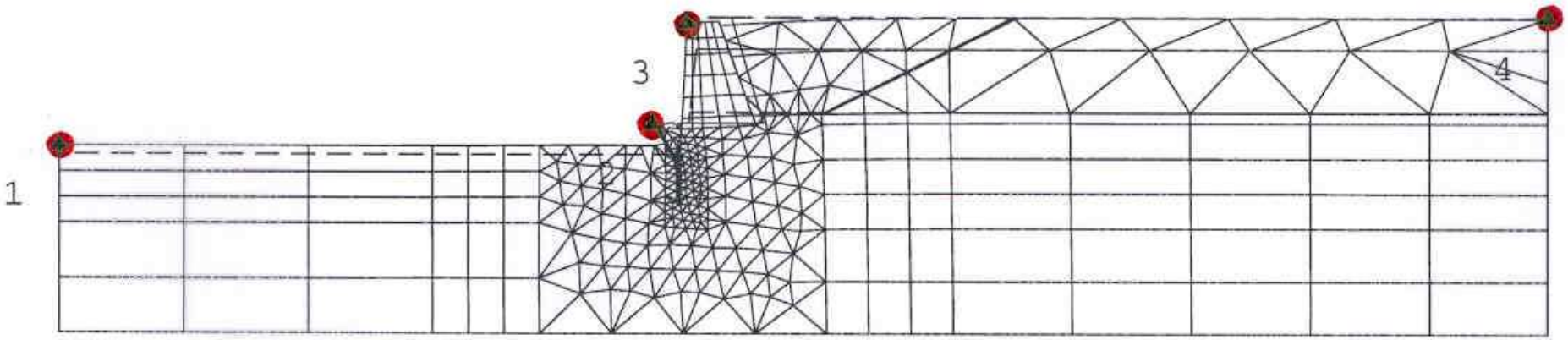


Contraintes normales

Contraintes tangentielles

Étape 6 : modélisation du rempiétement

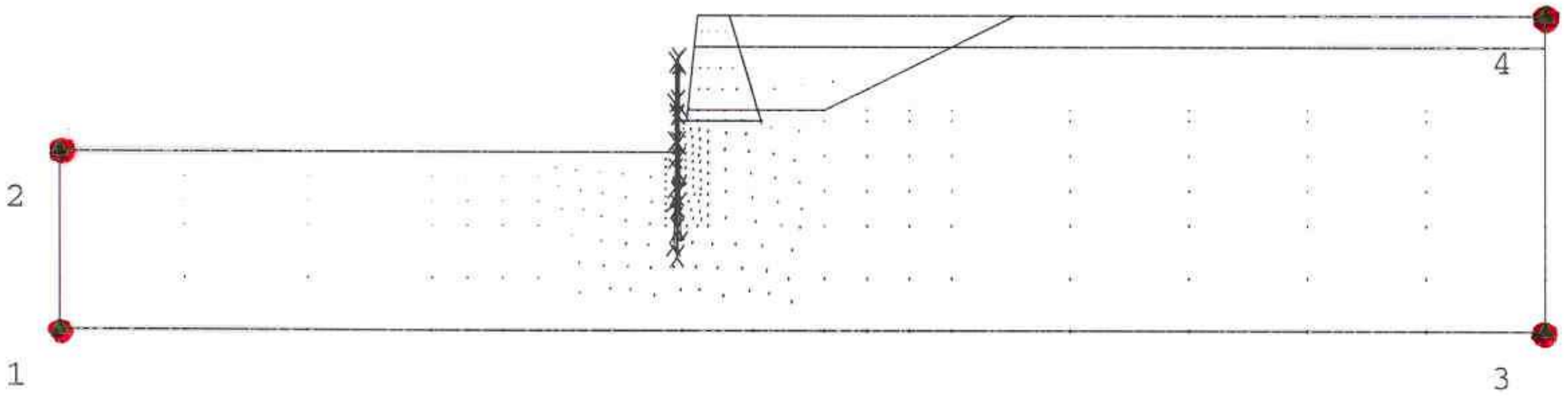
$$w = \frac{(1+\nu')(1-2\nu')}{E'(1-\nu')}(\gamma - \gamma_w)D_3\ H$$



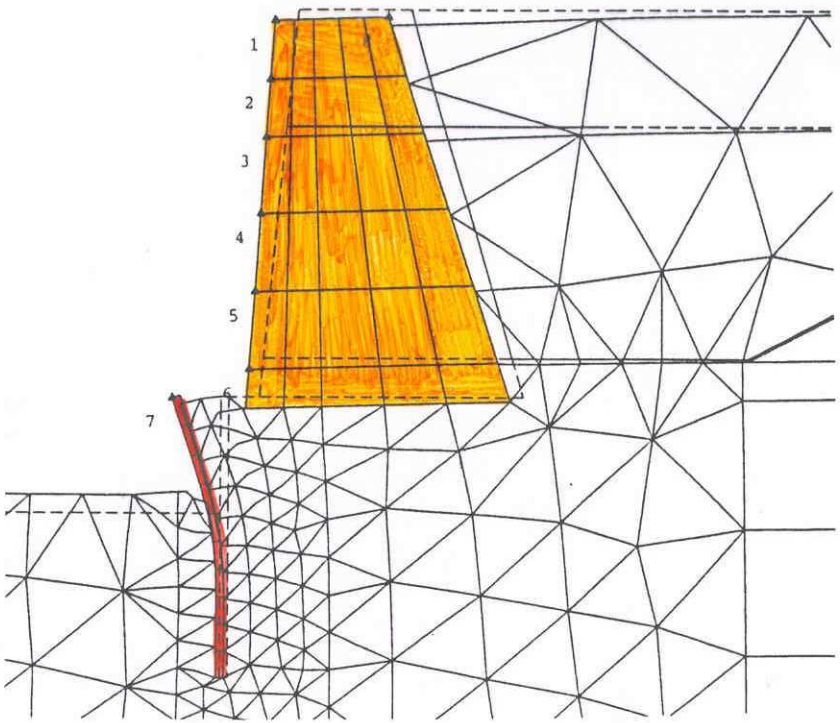
w = 5,613 mm (formule 1D)

w = 5,639 mm

Étape 6 : modélisation du rempiétement



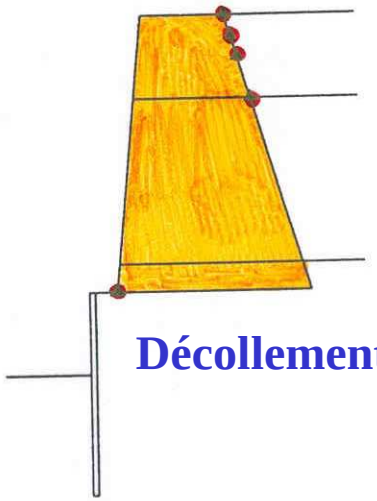
Étape 6 : modélisation du rempiétement



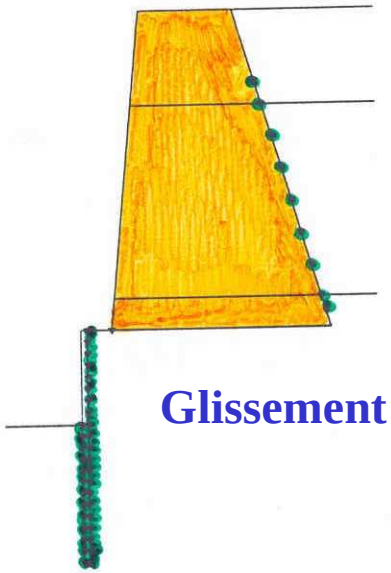
maillage initial --- maillage deforme ———

echelle .05

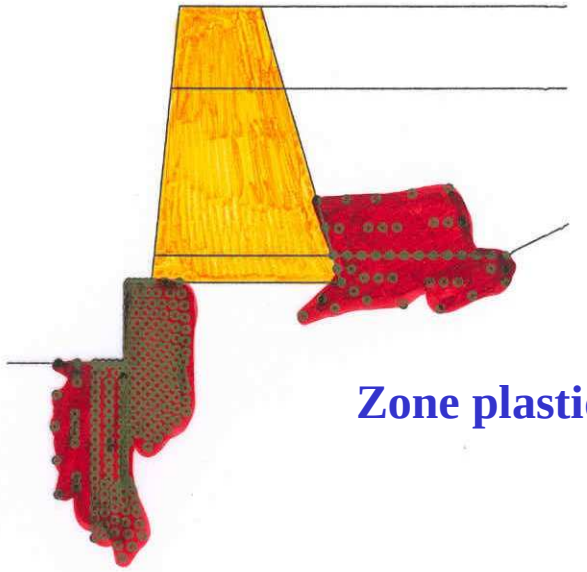
Point	Δu (m)	Δv (m)
1	-.00848012	-.00369702
2	-.00792336	-.00375259
3	-.00736711	-.00380792
4	-.00662718	-.00388189
5	-.00589036	-.00395709
6	-.00516487	-.00403589
7	-.0174834	-.000548803
8	-.0084803	-.00258329



Décollement



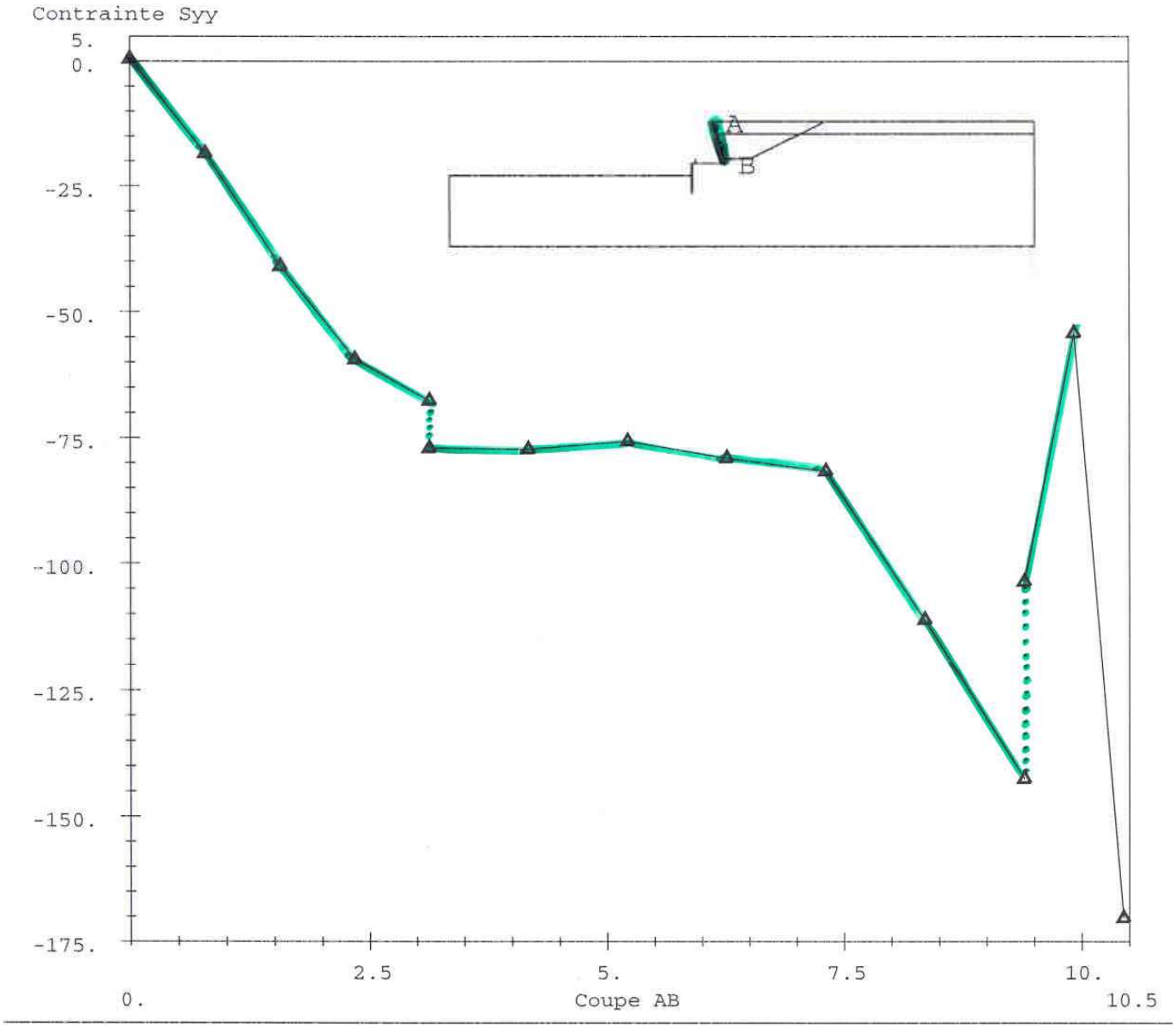
Glissement



Zone plastique

Étape 6 : modélisation du rempiétement

Contrainte verticale derrière le mur

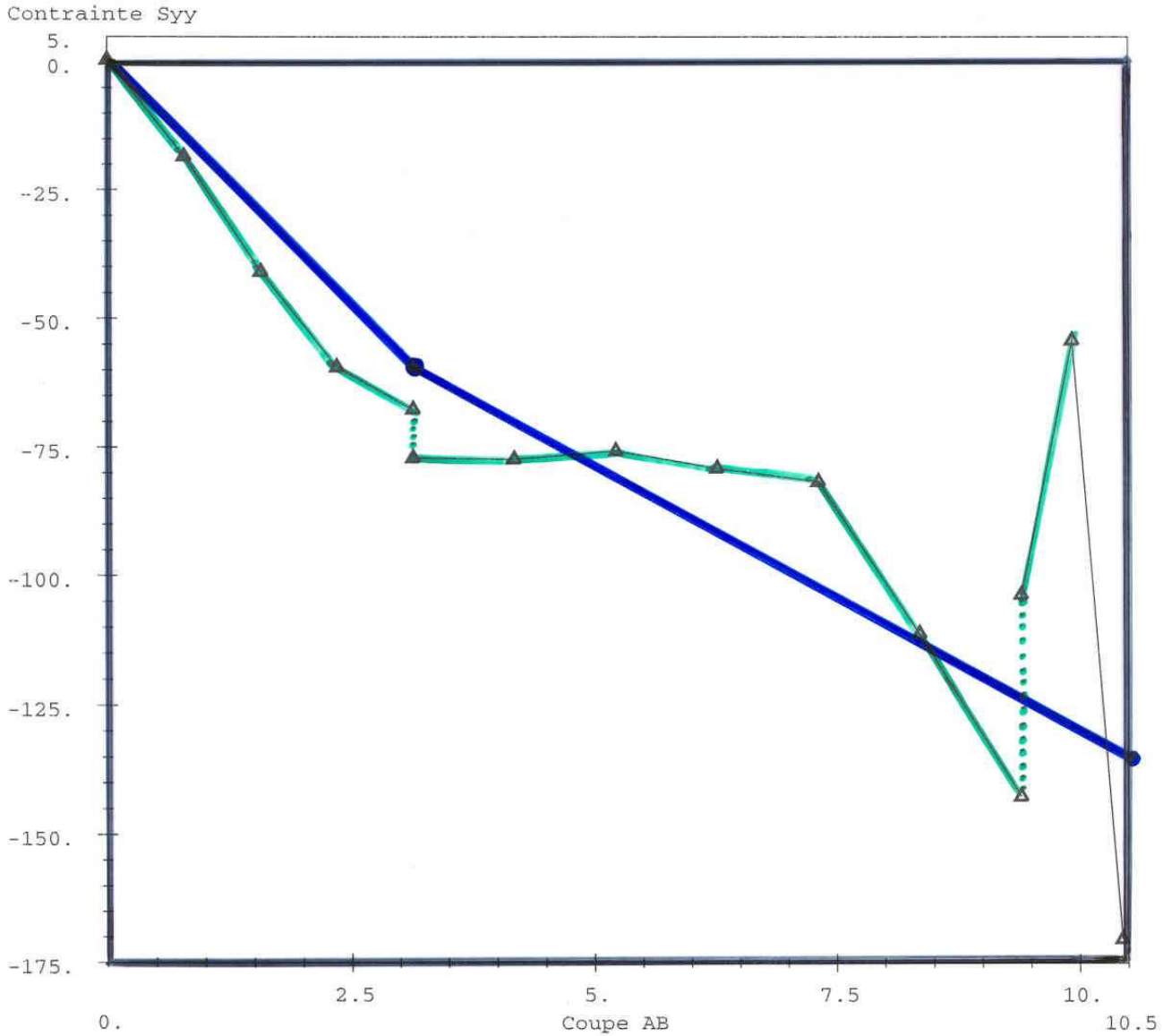


Étape 6 : modélisation du rempiétement

Contrainte verticale derrière le mur

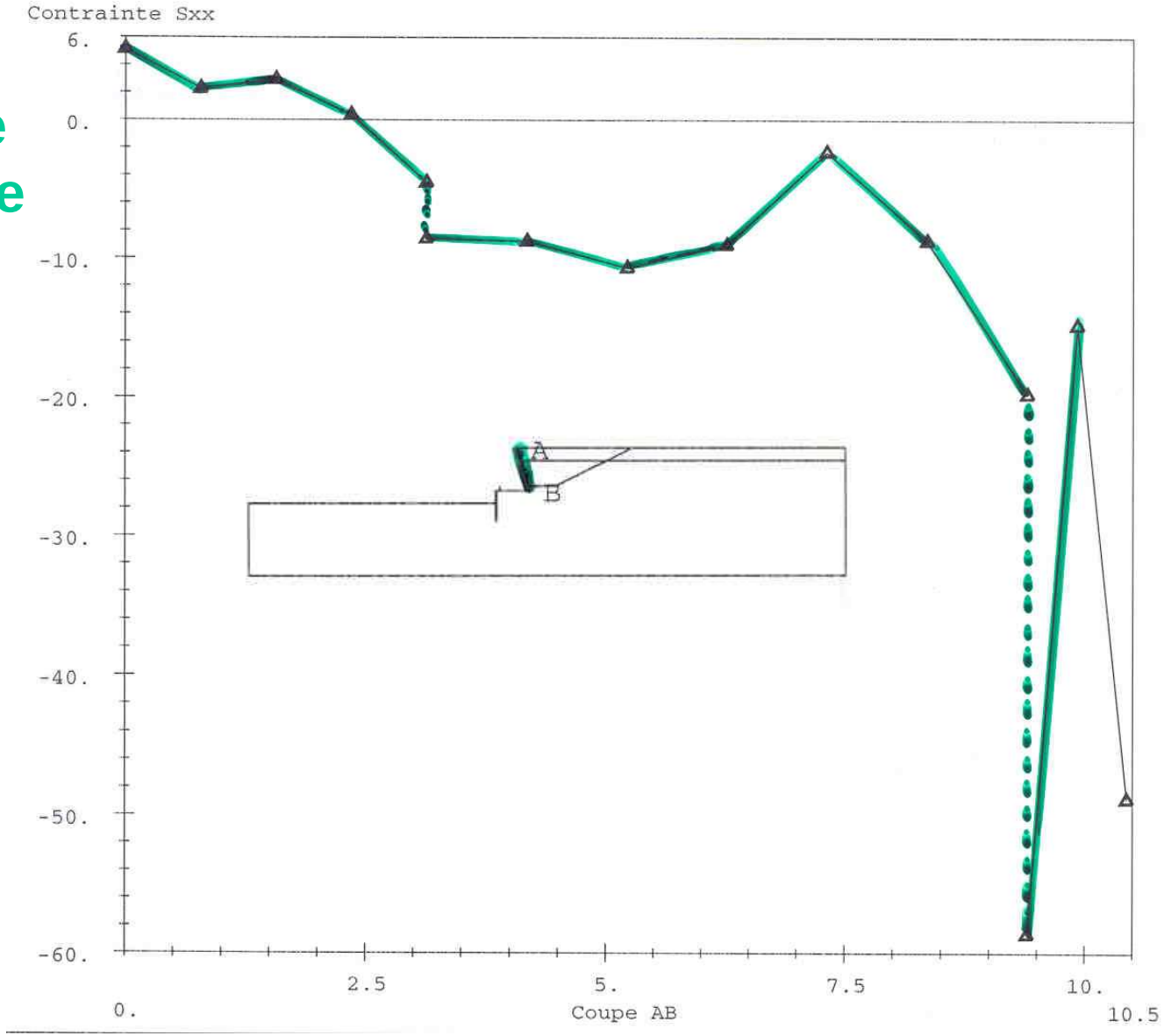
et

contrainte verticale initiale



Étape 6 : modélisation du rempiétement

Contrainte horizontale derrière le mur

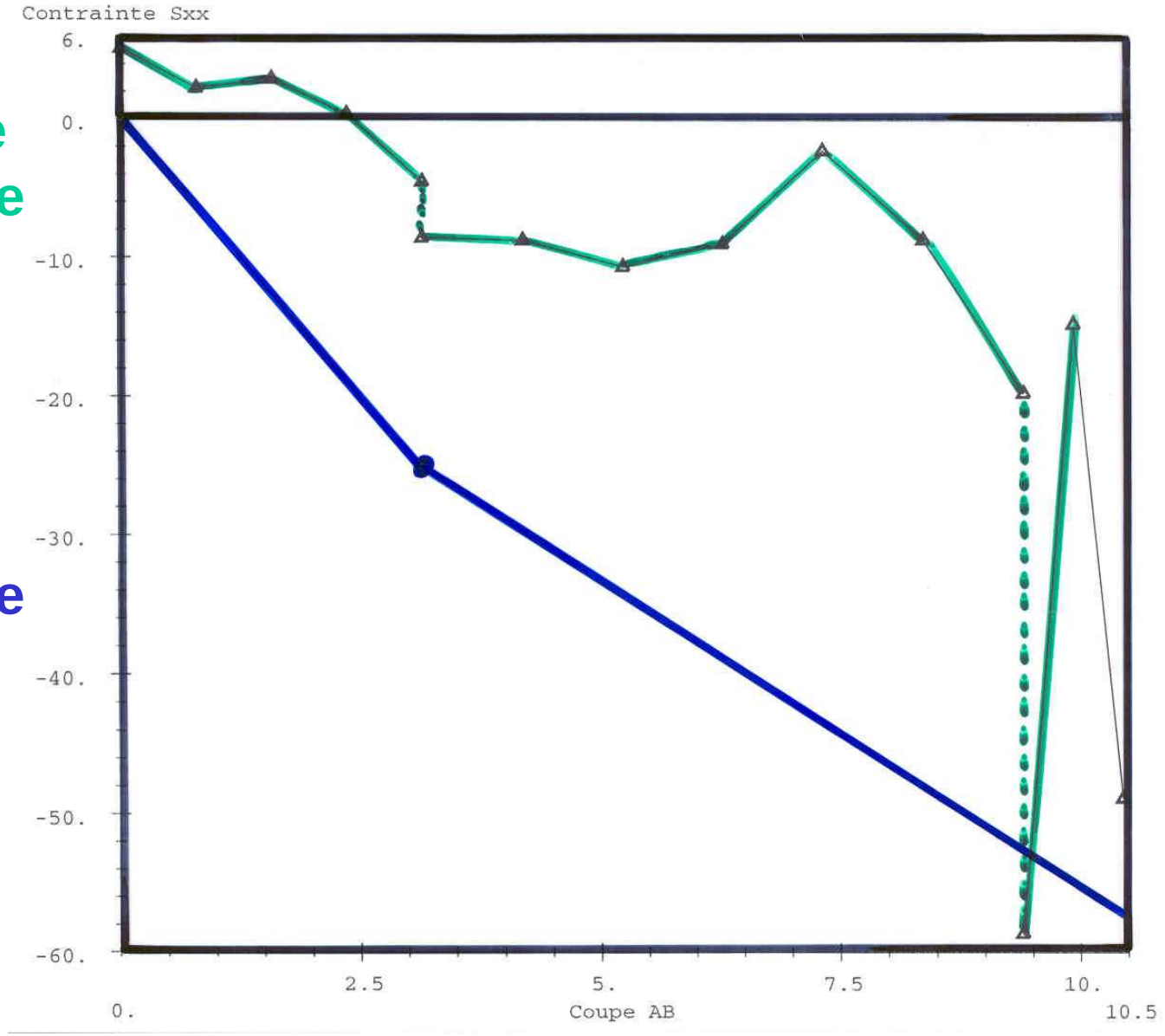


Étape 6 : modélisation du rempiétement

Contrainte horizontale derrière le mur

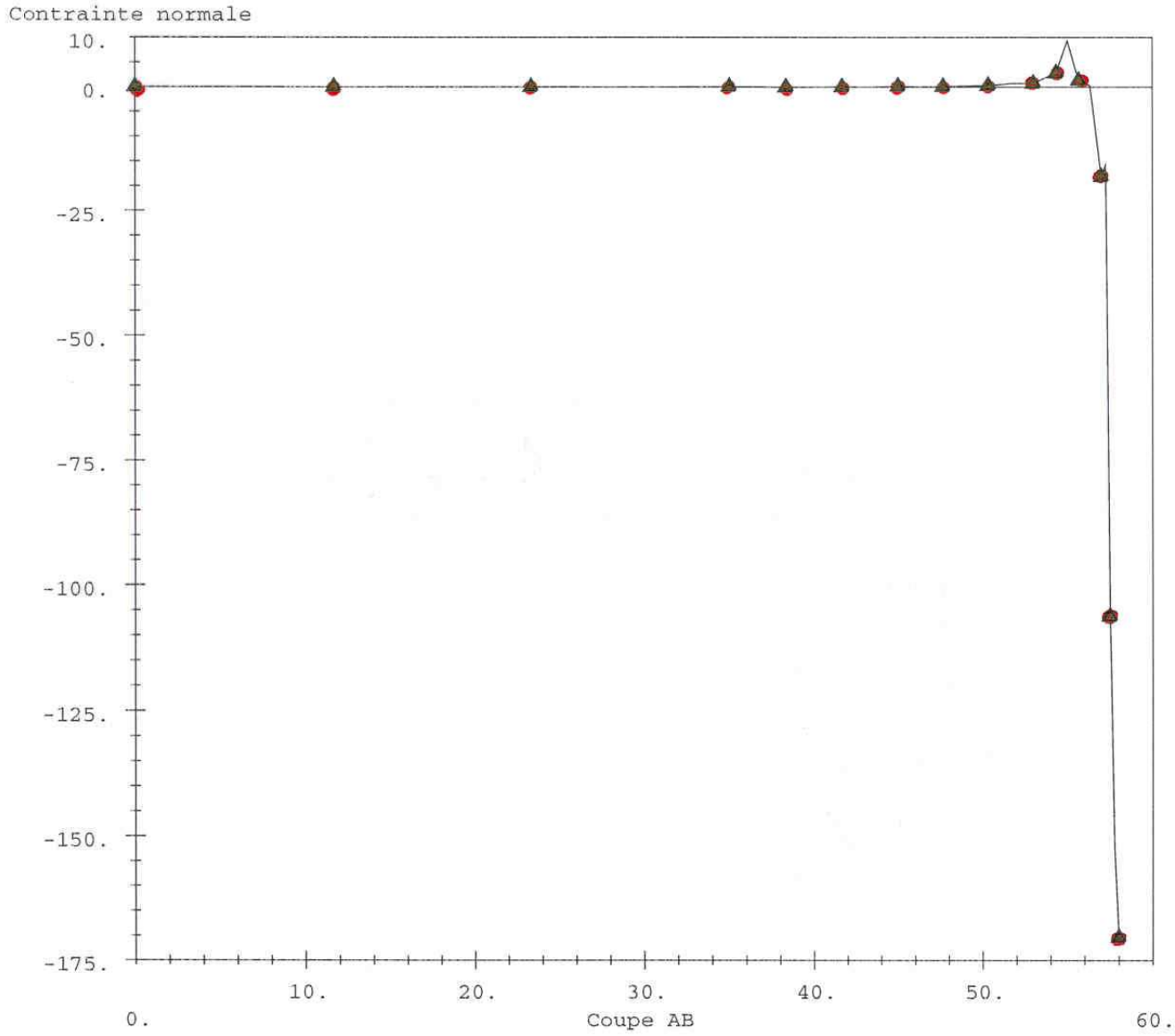
et

contrainte horizontale initiale

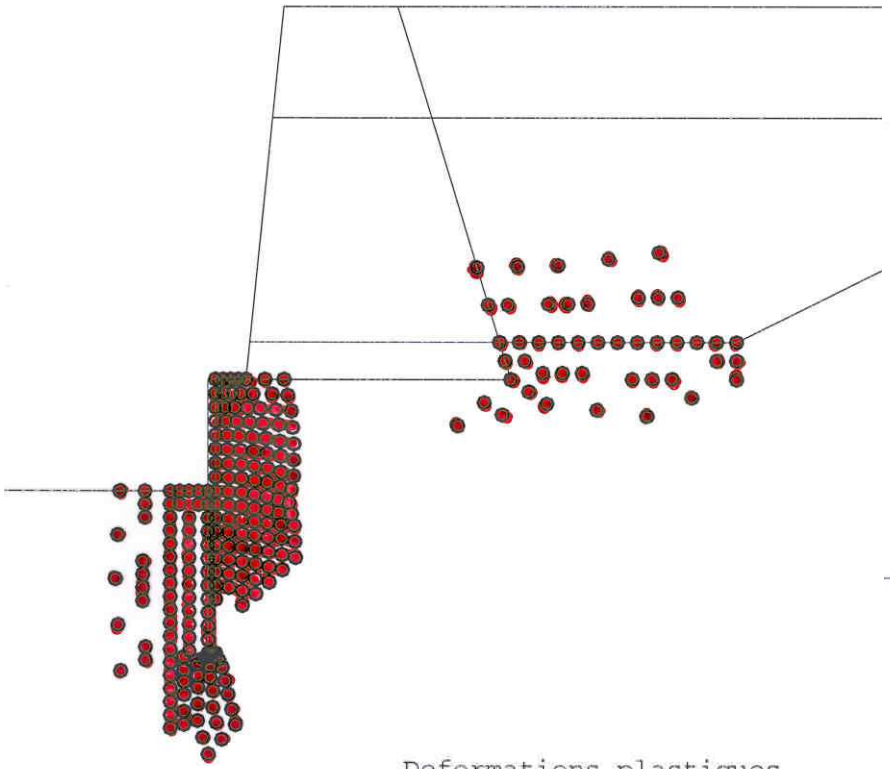


Étape 6 : modélisation du rempiétement

Contrainte normale au fond de fouille

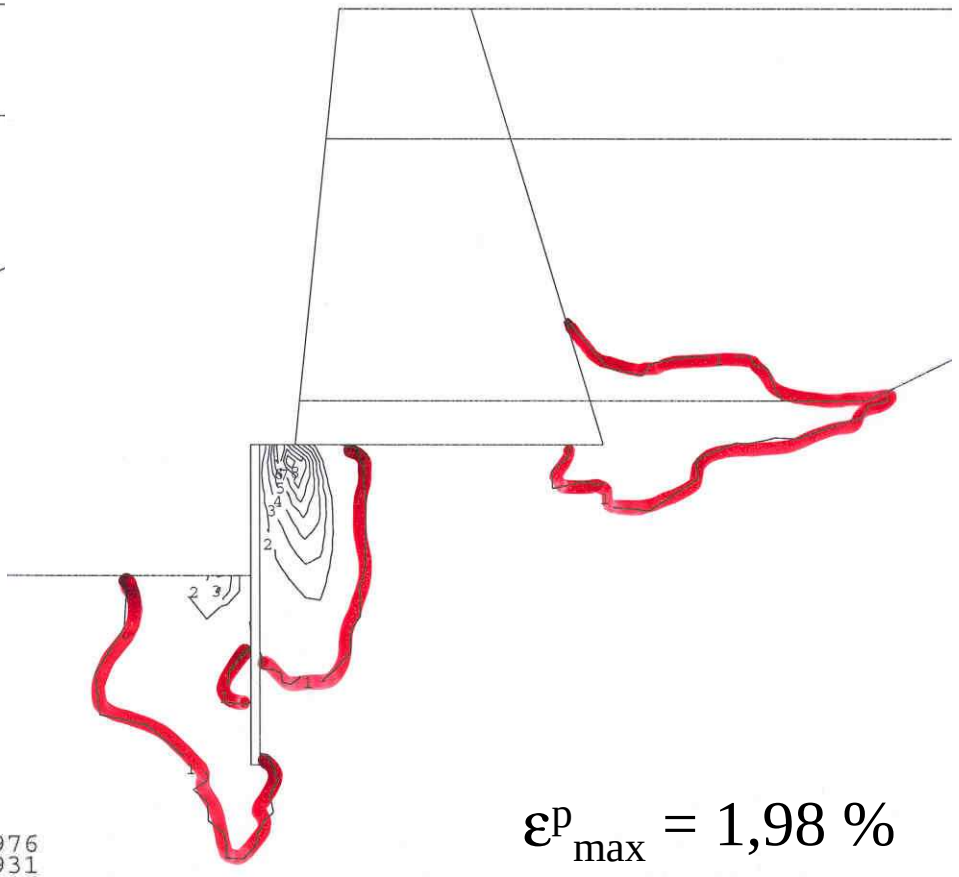


Étape 6 : modélisation du rempiétement



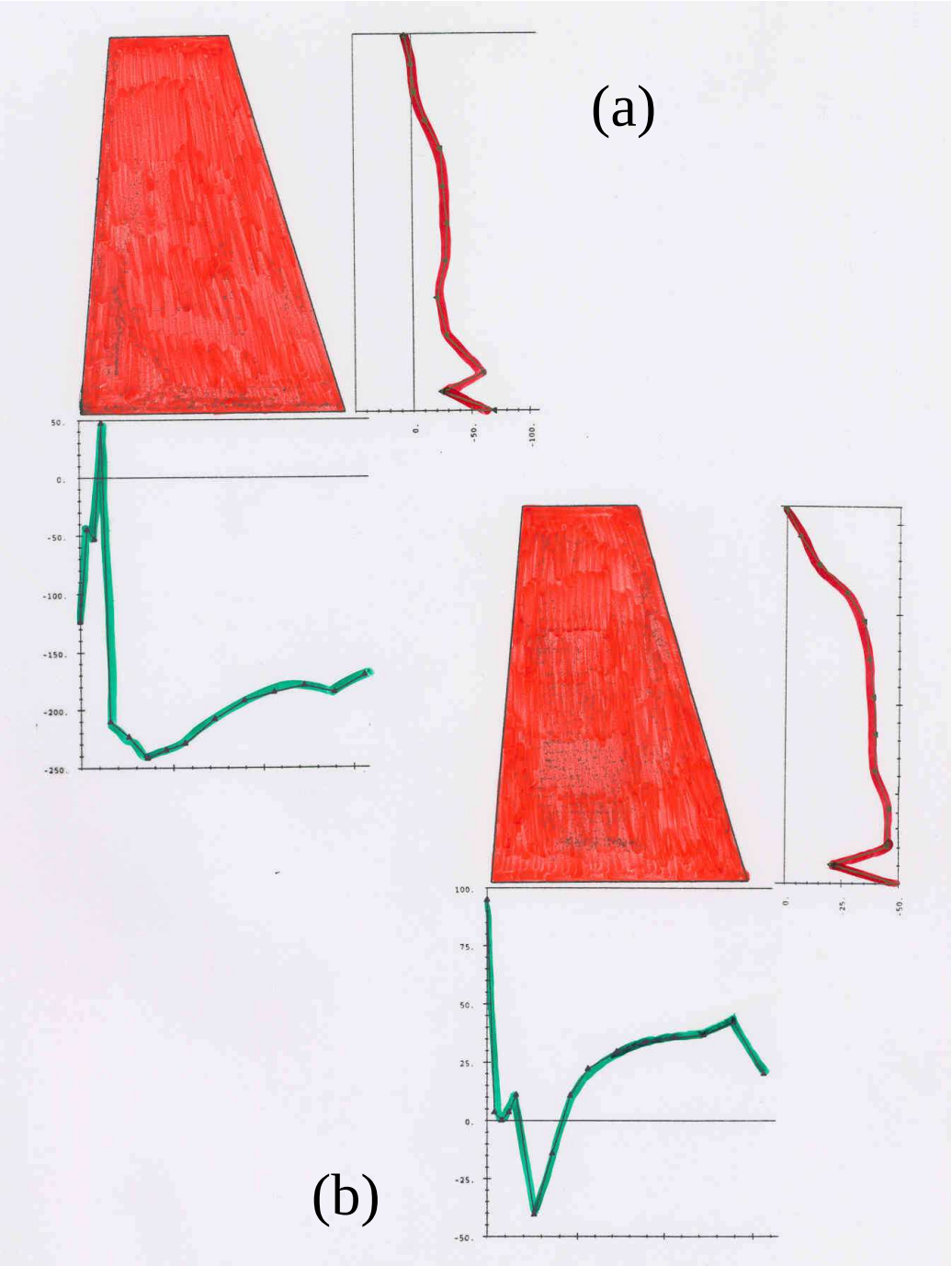
Deformations plastiques

1 :	2.0128E-5	6 :	.0109976
2 :	.00221563	7 :	.0131931
3 :	.00441112	8 :	.0153886
4 :	.00660662	9 :	.0175841
5 :	.00880212	10 :	.0197796



$\varepsilon^{p}_{max} = 1{,}98\ \%$

$\varepsilon^{p}_{moyen} = 0{,}5\ \%$



Étape 6 : modélisation du rempiétement

(a) Contraintes normales

(b) Contraintes tangentielles

Conclusions

Chaque ouvrage est un cas particulier.

Aussi, les vérifications d'un modèle numérique restent-elles une affaire relativement ponctuelle.

Toutefois, l'étude systématique d'ouvrages-types permet de proposer des critères objectifs pour la validation des calculs par éléments finis et une démarche qui peut se répéter.

FIN