



16 décembre 2005

Modules et élasticités

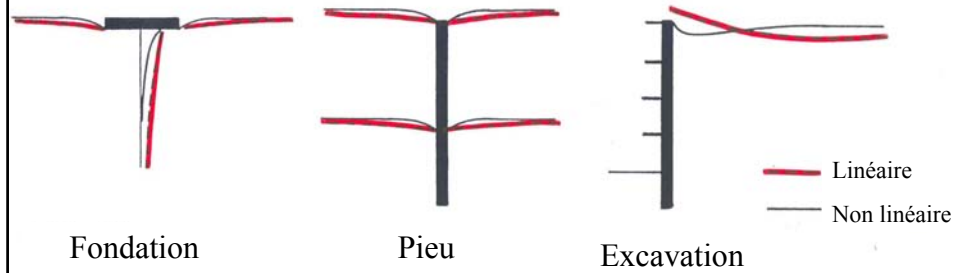
Philippe Mestat (LCPC)

Un problème mécanique

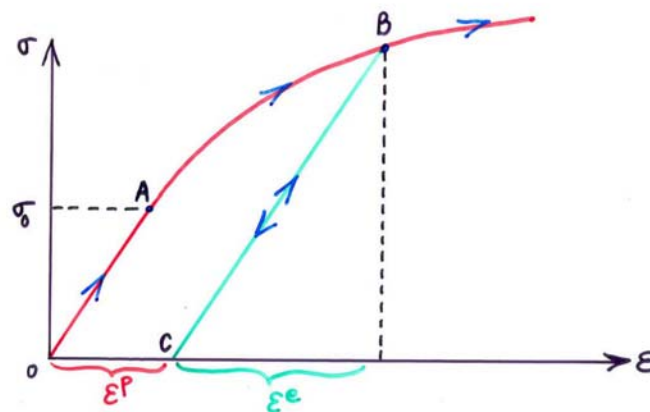
L'équilibre final d'un ouvrage dépend :

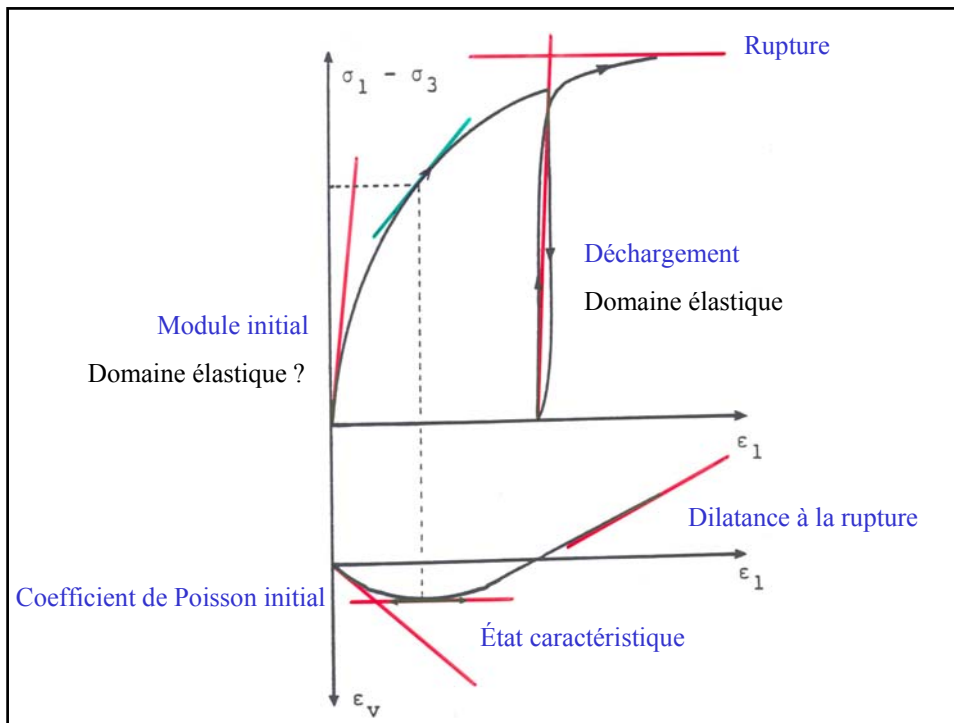
- de l'équilibre naturel initial ;
- des conditions aux limites ;
- des discontinuités et interactions éventuelles ;
- des lois de comportement des matériaux ;
- des phases d'exécution des travaux ;
- des conditions d'utilisation de l'ouvrage.

Comportement réel et modélisation non linéaire

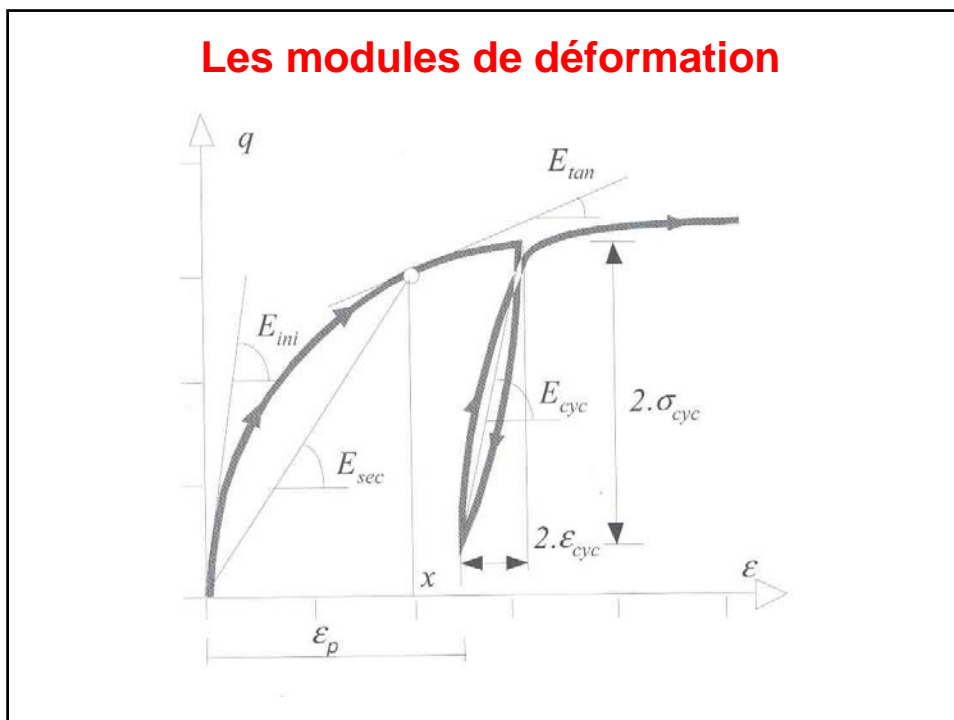


Principes de l'élastoplasticité

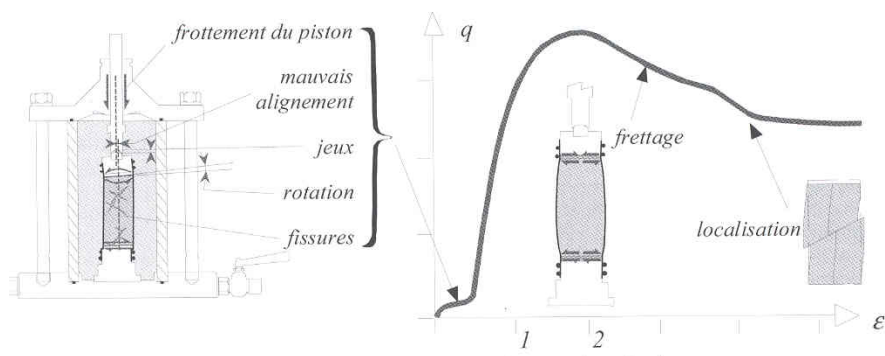




Les modules de déformation

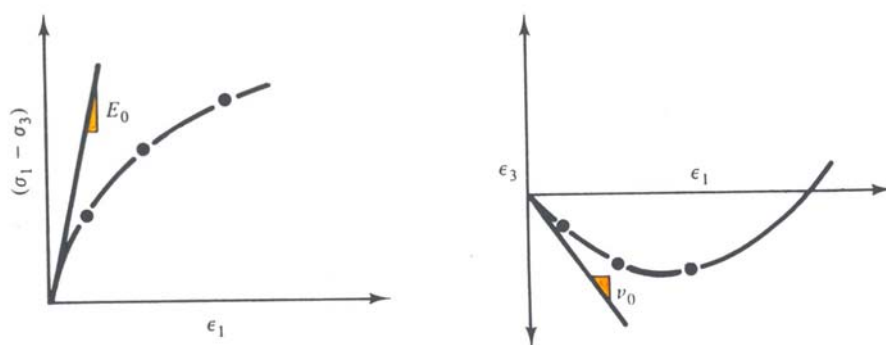


Les modules de déformation



Difficultés expérimentales affectant les résultats

Module d'Young et coefficient de Poisson



Problème de la définition du domaine d'élasticité

Définition du domaine élastique

- Le comportement d'un matériau est élastique lorsque l'histoire des sollicitations n'intervient pas et qu'à un état de contraintes correspond un état de déformations et un seul.
- La plupart des solides présentent un comportement réversible, au moins sous des sollicitations suffisamment faibles. Cela correspond à des déformations de l'ordre de :
 - 0,1 % pour les métaux ;
 - 0,01 % pour les sols (voire moins) ;
 - 600 % pour le caoutchouc.
- Au-delà, des irréversibilités apparaissent.
- Études des zones en déchargement.

Élasticité isotrope linéaire

$$\begin{pmatrix} \Delta\sigma_{xx} \\ \Delta\sigma_{yy} \\ \Delta\sigma_{zz} \\ \Delta\sigma_{xy} \\ \Delta\sigma_{xz} \\ \Delta\sigma_{yz} \end{pmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{pmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta\varepsilon_{xx} \\ \Delta\varepsilon_{yy} \\ \Delta\varepsilon_{zz} \\ \Delta\varepsilon_{xy} \\ \Delta\varepsilon_{xz} \\ \Delta\varepsilon_{yz} \end{pmatrix}$$

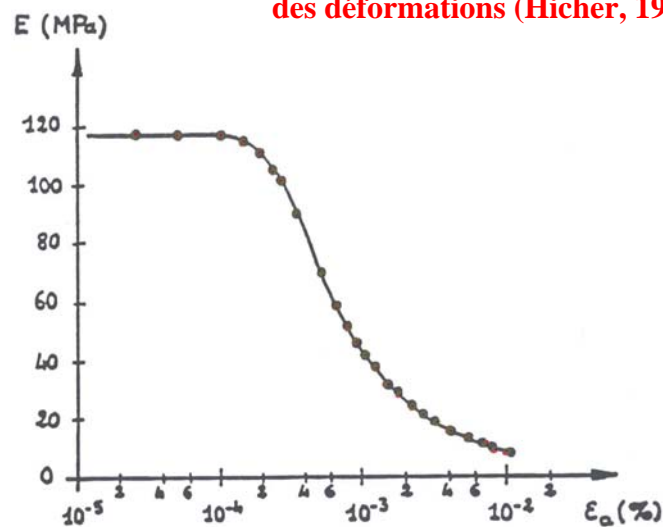
À déterminer : E et ν et l'état initial des contraintes (K_0 ?)

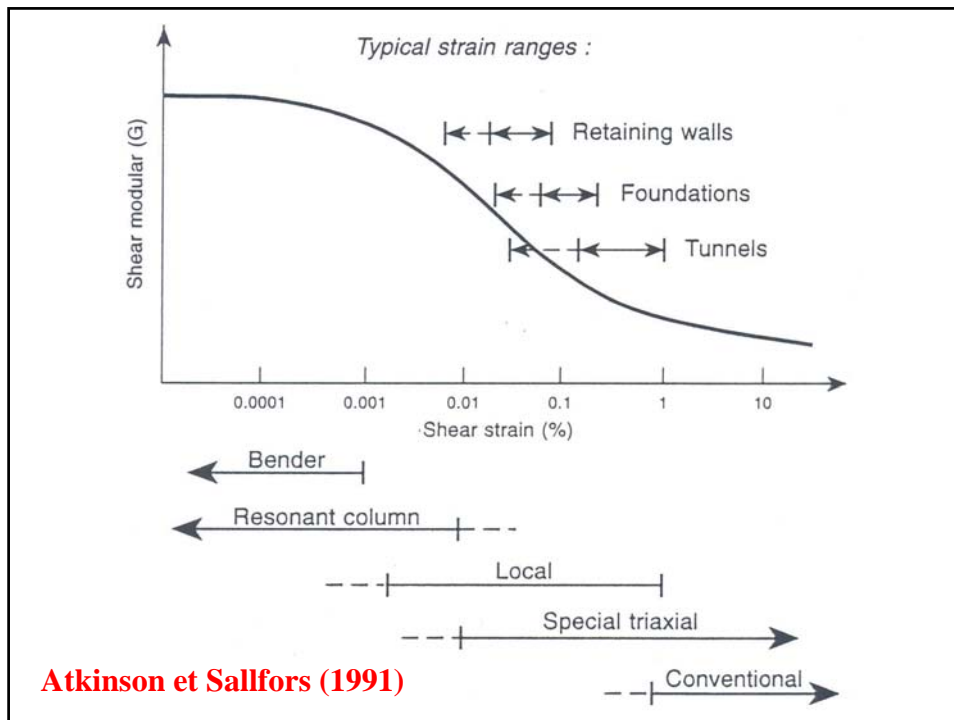
Facteurs influant sur le module E

- Niveau de déformations
 - » Très petites déformations ($< 0,001\%$)
 - » Petites déformations ($< 0,001\%$ à 1%)
 - » Grandes déformations ($> 1\%$)
- Niveau de contraintes
- Chemins de sollicitations

- Il est souhaitable de déterminer le module d'Young pour des déformations inférieures à $0,1\%$.

Évolution du module avec l'amplitude des déformations (Hicher, 1985)





Modules et chemins de sollicitations

- Essai triaxial (σ_1 et $\sigma_2 = \sigma_3 = \text{constante}$)

$$\frac{d(\sigma_1 - \sigma_3)}{d\varepsilon_1} = E$$

- Essai en déformation plane ($\varepsilon_2 = 0$ et $\sigma_3 = \text{constante}$)

$$\frac{d(\sigma_1 - \sigma_3)}{d\varepsilon_1} = \frac{E}{1 - \nu^2}$$

- Définition du module :

$$\frac{d(\sigma_1 - \sigma_3)}{d(\varepsilon_1 - \varepsilon_3)} = \frac{E}{1 + \nu}$$

Variation des paramètres avec la contrainte principale mineure

Module d'Young :
$$E_t = E_0 p_a \left(\frac{\sigma_3}{p_a} \right)^n$$

Coefficient de Poisson :
$$\nu_t = A - B \ln \left(\frac{\sigma_3}{p_a} \right)$$

Les modèles élastiques

- Élasticité linéaire isotrope :
 - E et ν constant ;
 - E(z), ν constant.
- Élasticité linéaire anisotrope (orthotrope) :
 - E_i et ν_i constants ;
 - $E_i(z)$, ν_i constant (par exemple : $E_v(z)$, $E_h(z)$, $G(z)$)
- Élasticité non linéaire : $E(\sigma_{kl})$
- Hyperélasticité : $\sigma_{kl} = \partial W(\varepsilon_{mn}) / \partial \varepsilon_{kl}$
- Hypoélasticité : $d\sigma_{kl} = E_{klmn} d\varepsilon_{mn}$

Exemples d'élasticité non linéaire

Références	K	G
Burland et Roscoe (1968)	$\frac{1 + e_0}{\kappa} p$	G_0
Nelson et Baron (Desai et al., 1984)	$K_0 + \alpha_1 p$	$G_0 + \alpha_2 q$
Chen et Baladi (Desai et al., 1984)	$\frac{K_0}{1 - K_1} (1 - K_1 e^{-3K_2 p})$	$\frac{G_0}{1 - G_1} (1 - G_1 e^{-\sqrt{3}G_2 q})$
Boyce (1980) Cambou et Jafari (1988)	$\frac{K_0 p_a \left(\frac{p}{p_a}\right)^{1-n}}{1 - (1-n) \frac{K_0}{6G_0} \frac{q^2}{p^2}}$	$G_0 p_a \left(\frac{p}{p_a}\right)^{1-n}$
Loret (1981) <i>f</i> est une fonction quelconque	$3r_0 f(p^2 + r_0 q^2)$	$f(p^2 + r_0 q^2)$
Loret (1981) Lade et Nelson (1987)	$\frac{3r_0 E_0 p_a}{2(1+\nu)} \left[\left(\frac{p}{p_a}\right)^2 + r_0 \left(\frac{q}{p_a}\right)^2 \right]^{2n}$	$\frac{E_0 p_a}{2(1+\nu)} \left[\left(\frac{p}{p_a}\right)^2 + r_0 \left(\frac{q}{p_a}\right)^2 \right]^{2n}$
Vermeer (1982)	$\frac{2}{3} G$	$G_0 \left[\frac{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2}}{3p_0} \right]^{1-\beta}$

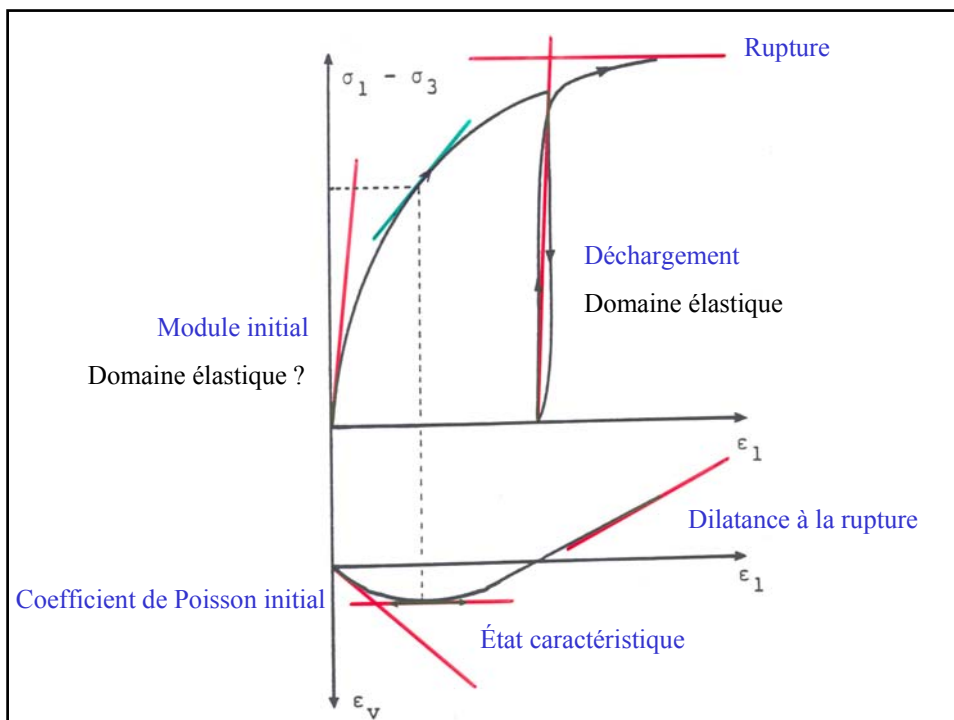
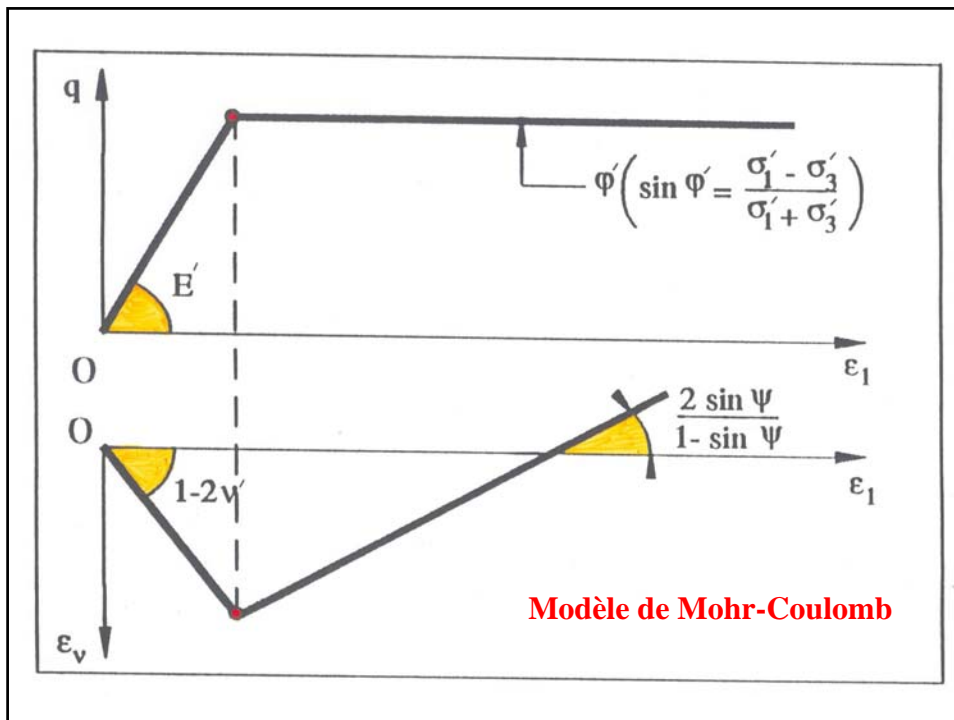
p_a est la pression atmosphérique : $K_0, G_0, n, r_0, E_0, \nu, e_0, \kappa, \alpha_1, \alpha_2, K_1, K_2, G_1, G_2$ sont des constantes.

Relations de comportement élastoplastique

$$d\varepsilon_{ij} = \left\{ D_{ijkl} + \frac{1}{H} \frac{\partial G}{\partial \sigma_{ij}} \frac{\partial F}{\partial \sigma_{kl}} \right\} d\sigma_{kl}$$

$$d\sigma_{ij} = \left\{ E_{ijkl} - \frac{E_{ijkl} \frac{\partial G}{\partial \sigma_{kl}} \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} E_{ijkl}}{H + \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} E_{ijkl} \frac{\partial G}{\partial \sigma_{kl}}} \right\} d\varepsilon_{kl}$$

$$d\lambda = \frac{\frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} E_{ijkl} d\varepsilon_{kl}}{H + \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} E_{ijkl} \frac{\partial G}{\partial \sigma_{kl}}}$$



Détermination d'un module

$$E(\varepsilon_i \leq \varepsilon_N) = \frac{\sum_{i=1}^N q_i \varepsilon_i}{\sum_{i=1}^N (\varepsilon_i)^2}$$

Pour tous les couples de points (ε_i, q_i) tels que : $q_i \leq q_{\max}$ et $\varepsilon_i \leq \varepsilon_N$

Calcul d'incertitude

$$\frac{\delta E}{E} = \frac{\sum_{i=1}^N (\delta q_i \cdot \varepsilon_i + q_i \cdot \delta \varepsilon_i)}{\sum_{i=1}^N q_i \cdot \varepsilon_i} + \frac{\sum_{i=1}^N 2\varepsilon_i \cdot \delta \varepsilon_i}{\sum_{i=1}^N (\varepsilon_i)^2}$$

Calcul d'incertitude

$$\sum_{i=1}^N q_i \cdot \varepsilon_i \leq q_{\max} \cdot \sum_{i=1}^N \varepsilon_i$$

$$\sum_{i=1}^N q_i \cdot \varepsilon_i \leq \varepsilon_N \cdot \sum_{i=1}^N q_i$$

$$\sum_{i=1}^N (\varepsilon_i)^2 \leq \varepsilon_N \cdot \sum_{i=1}^N \varepsilon_i$$

Calcul d'incertitude

$$3 \frac{\delta \varepsilon}{\varepsilon_N} + \frac{\delta q}{q_{\max}} \leq \frac{\delta E}{E}$$

Exemple d'application :

$q_{\max} = 100 \text{ kPa}$; $\delta q = 1 \text{ kPa}$; $\delta \varepsilon = 0,01\%$; $\varepsilon_N = 0,1\%$

Alors l'erreur relative est au moins égale à 30% !